Holomorficzna dynamika, fraktale, formalizm termodynamiczny. Dla przekształcenia f przestrzeni X zwiększającego odległości, iterowanie działania f prowadzą małe zbiory na duże (dynamiczny "eskalator"). W ten sposób zachowanie w długim czasie pod działaniem f daje wgląd w w lokalną strukturę X. Badamy tu głównie f zachowujące kąty (konforemne), więc zachowujące kształty.

Pracujemy głównie na sferze Riemanna S^2 z funkcją f holomorficzną (konforemną wszędzie oprócz punktów krytycznych, gdzie pochodna Df zeruje się) działając f-em na otwartym obszarze U, i ze zbiorami granicznymi tego działania. Jeśli $U = S^2$ to f jest funkcją wymierną (ilorazem dwóch wielomianów) stopnia co najmniej 2, i rozważa się zbiór Julii $X = J = J(f)$, zwarty, f-niezmienniczy, z *chaotyczną* dynamiką, i jego uzupełnienie $F(f)$ nazywane zbiorem Fatou. To $F(f)$ składa się z najwyżej skończonej liczby składowych okresowych i ze składowych ich przeciwobrazów dla f^n. Te okresowe są przyciągane do okresowych orbit przyciągających lub parabolicznych lub są *osobliwe z eliptyczną dynamiką* (obrotem o kąt niewymierny) w odpowiednich holomorficznych współrzędnych): dysk Siegela lub pierścień Hermana. $F(f)$ może być pusty, czyli $J = S^2$. Jeśli nie, to J jest brzegowy, zazwyczaj *fraktalny.* To słowo zostało wprowadzone przez Benoît Mandelbrota w latach 1970-tych, na określenie kształtów z wymiarem Hausdorffa HD ściśle większym niż topologiczny. $\mathrm{HD}(X)$ określa ile małych kul potrzeba do pokrycia X. Wiadomo, że dla wielomianów (oprócz z^d i Chebyshev'a) J jest fraktalem, ale dla f wymiernych (oprócz $J = S^2$) jest to problem, który wymaga głebokiego zrozumienia wewnętrznej struktury zbioru Julii, przy obecności dziedzin osobliwych. I tak, udowodnienie $\mathrm{HD}(J(f)) > 1$ dla spójnego J nie będącego krzywą analityczną to pierwszorzędny cel projektu.

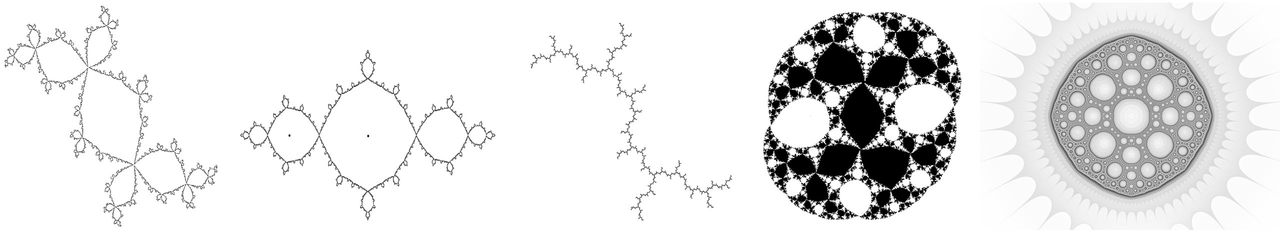

FIGURE 1. Zbiory Julii: królik $f(z) = z^2 - 0.123 + 0.745i$, bazylika $f(z) = z^2 - 1$, dendryt $f(z) = z^2+i$, bazylika z królikiem $f(z) = \frac{z^2+c}{z^2-1}$ dla $c = \frac{1+\sqrt{-3}}{2}$ z $J(f)$ będącym granicą między białym a czarnym, dywan Julii-Sierpińskiego $f(z) = z^2 - 1/16z^2$ gdzie brzegi składowych Fatou nie dotykają się .

Metodą badania fraktala jest rozkładanie na nim mas. Dla $J(f)$ użyjemy f-niezmienniczej miary (stanu) równowagi, która maksymalizuje entropię plus całkę z potencjału. To maksymum nazywane jest *ciśnieniem (energią swobodną w równowagowej fizyce statystycznej).* Rozkłada się miarę m_t na małych dyskach B zgodnie z ich średnicami w potędze $t = \alpha$ takiej, żeby miary sumowały się do 1 (dla innych t używa się normalizującego czynnika). Tu potencjał to $-t \log |Df|$; zauważmy, że $|Df^{-n}|$ są mniej więcej tymi średnicami, gdzie n to czasy dojścia do dużej skali. $1/t$ pełni rolę temperatury. α okazuje się być (zazwyczaj) $\mathrm{HD}(J)$. Stąd ten potencjał i ciśnienie nazywane są *geometrycznymi.*
• Zakładając istnienie m_t zbadamy własności statystyczne ciągów $\phi \circ f^n(z)$ dla m_t prawie każdego z i obserwabli ϕ. Pojawią się średnie Cesaro i duże odchylenia. • Będziemy badali spektrum wymiarów Hausdorffa zbiorów punktów z z danym wykładnikiem Lapunowa $\lim_{n\to\infty} 1/n \log |Df^n(z)|$ jako transformatę Legendre'a ciśnienia geometrycznego jako funkcji temperatury. • Spojrzymy na obszary U sparametryzowane dyskiem jednostkowym przez przekształcenie Riemanna R, którego zachowanie brzegowe w obecności f powiążemy z fraktalną naturą ∂U bez f. Te obiekty będą parametryzowane *asymptotyczną wariancją.* • Zbadamy ciśnienie w języku orbit okresowych z geometrycznymi wagami, co ma związek z twierdzeniem o liczbach pierwszych, i akumulację tych orbit w nielinearyzowalnych orbitach okresowych lub (włochatych) brzegach dysków Siegela. • Kombinatoryczną wersją R i kodowania przez promienie, są geometryczne drzewa kodujące i ich nieskończone gałęzie γ. Dają silną metodę przeniesienia miary z przestrzeni symbolicznej do J. Zbiory akumulacji γ są warte lepszego zrozumienia, a także związki z rozbiciami Markowa i grafami Γ z rozszerzonym na nie f, z brzegiem J; otrzymujemy pomost do geometrycznej teorii grup. • Będziemy badać rozgałęzione nakrycia sfery S^2, *zgrubsza rozciągające*, ogólniejsze niż funkcje wymierne, i ich kwazikonforemne sprzężenia. • Zbadamy niejednostajną hiperboliczność, w związku z rekurencją punktów krytycznych. • Zaatakujemy problem $\mathrm{HD}(J) > 1$ dla J krzywej f-niezmienniczej blisko okręgu jednostkowego, dla f **rzeczywistych** zaburzeń z^d, i problem czy HD zbiorów hiperbolicznych jest sumą wymiarów stabilnego i niestabilnego.

Projekt jest zorganizowany w obszary i otwarte problemy dojrzałe do przełomu i rozwiązania. Wiąże układy dynamiczne z analizą zespoloną, geometryczną teorią grup, teorią miary, geometryczną analizą, topologią, teorią prawdopodobieństwa i wyniki mogą się stosować w fizyce statystycznej, modelowaniu chemicznych i biologicznych procesów, a nawet mechanice klasycznej i astrofizyce.