POPULARNONAUKOWE STRESZCZENIE PROJEKTU

Grafy są abstrakcyjnymi strukturami, które mają za zadanie modelować interakcje między parami obiektów. Obiekty takie są reprezentowane w grafie za pomocą wierzchołków, zaś interakcje za pomocą krawędzi, z których każda łączy pewne dwa obiekty. Ważną rodzinę klas grafów stanowią *grafy przecięć obiektów geometrycznych*, w których wierzchołki reprezentowane są przez pewne obiekty geometryczne, na przykład odcinki na linii, łuki na okręgu, czy też kule bądź krzywe ciągłe na płaszczyźnie, zaś krawędzie odpowiadają parom przecinających się obiektów. Oczywiście, rozważając obiekty geometryczne różnego rodzaju, otrzymujemy różne klasy grafów przecięć; dla przykładu, *grafy przedziałowe* to grafy przecięć odcinków na linii, *grafy łukowe* to grafy przecięć łuków ustalonego okręgu. Okazuje się, że grafy takie są szeroko wykorzystywane do modelowania różnych rzeczywistych problemów, zaś algorytmy pracujące na takich klasach grafów znajdują praktyczne zastosowania w takich problemach jak przydział zasobów czy projektowanie układów scalonych. Oczywiście grafy te są również wykorzystywane do wizualizacji zależności zachodzących pomiędzy różnego rodzaju obiektami.

Dwa podstawowe problemy algorytmiczne dla każdej klasy grafów to rozpoznawanie grafów tej klasy oraz testowanie istnienia izomorfizmu pomiędzy grafami z tej klasy. W problemie rozpoznawnia ustalonej klasy grafów mamy zdecydować, czy graf dany na wejściu należy do tej klasy. Dla geometrycznych klas grafów przecięć, problem rozpoznawania sprowadza się do pytania, czy dany na wejściu graf ma reprezentację właściwą dla tej klasy grafów (np. w postaci przedziałów na prostej dla grafów przedziałowych). Problem izomorfizmu z kolei polega na sprawdzeniu, czy dwa grafy z pewnej klasy grafów są do siebie izomorficzne, to znaczy, czy istnieje bijekcja pomiędzy wierzchołkami tych grafów zachowująca krawędzie. W przypadku klasy grafów przecięć problem ten sprowadza się do sprawdzenia, czy dwa grafy z tej klasy, być może reprezentowane w inny sposób, stanowią ten sam abstrakcyjny graf, to znaczy, czy obiekty jednego grafu możemy w sposób bijektywny odwzorować w obiekty drugiego grafu tak, aby zachować pary przecinających i nieprzecinających się obiektów. Poszukiwanie wydajnych algorytmów rozwiązujących powyższe problemy w różnych klasach grafów stanowi trzon algorytmicznej teorii grafów od jej zarania. Dla wielu klas grafów problemy te można rozwiązać efektywnie za pomocą *algorytmów wielomianowych*, to znaczy takich, które wykonują wielomianowo wiele operacji w zależności od rozmiaru wejścia. Znane są np. wielomianowe algorytmy rozpoznawania grafów przedziałowych czy też grafów łukowych, wiadomo też, w oparciu o ogólnie akceptowane hipotezy teorii złożoności obliczeniowej, że algorytmów takich nie posiadają np. grafy przecięć kół na płaszczyźnie. Nieco inaczej jest z problemem izomorfizmu – nie znaleziono dotychczas wielomianowego algorytmu testującego izomorfizm dwóch dowolnych grafów, nie podano również przekonującego uzasadnienia, że algorytm taki nie istnieje. Oczywiście w pewnych klasach grafów, np. w klasie grafów przedziałowych oraz grafów łukowych, problem izomorfizmu można rozwiązać algorytmem wielomianowym, w innych klasach, np. w klasie grafów przecięć krzywych ciągłych, problem ten okazuje się być tak trudny jak w klasie wszystkich grafów.

W ostatnim czasie dość intensywnie badane są tak zwane H-grafy, będące szczególnego rodzaju grafami przecięć. Nieformalnie klasę H-grafów możemy zdefiniować następująco. Wyobraźmy sobie, że graf H reprezentowany jest w przestrzeni trójwymiarowej tak, że wierzchołki H odpowiadają pewnym punktom tej przestrzeni, zaś krawędzie krzywym ciągłym łączącym punkty reprezentujące końce tej krawędzi. Dodatkowo załóżmy, że w reprezentacji tej wnętrza wszystkich krzywych są parami rozłączne. Przy takim założeniu, H-grafy to grafy przecięć zbiorów łukowo spójnych zawartych w tej reprezentacji H (to znaczy, w sumie mnogościowej wszystkich punktów i krzywych ciągłych odpowiadających wierzchołkom i krawędziom H). Okazuje się, że H-grafy są abstrakcją wielu znanych klas grafów przecięć, np. grafów przedziałowych czy grafów łukowych. Jako takie, są one przedmiotem intensywnych badań mających na celu uogólnienie wydajnych algorytmów optymalizacyjnych działających w prostych klasach grafów przecięć na szersze rodziny H-grafów, jak również w kierunku określenia granicy „wielomianowej obliczalności” dla problemów rozpoznawania oraz testowania izomorfizmu. Określenie tych granic dla rodzin H-grafów stanowi główny cel niniejszego projektu. Wiadomo już, że granica ta przebiega dość blisko klasy grafów łukowych. Pomimo iż grafy łukowe wydają się być bliskie grafom przedziałowym, okazują się one mieć istotnie inne własności kombinatoryczne i algorytmiczne. W szczególności, wiele problemów, które w klasie grafów przedziałowych posiada wielomianowe algorytmy lub jest dawno rozwiązana, w klasie grafów łukowych okazuje się być trudna obliczeniowo bądź pozostaje ciągle otwarta. Drugi cel niniejszego projektu stanowią dalsze badania własności strukturalnych oraz algorytmicznych tej klasy grafów, które pozwolą rozwiązać część otwartych problemów w tej klasie grafów przecięć.