STRESZCZENIE POPULARNE

Funkcje typu L są funkcjami generującymi związanymi z pewnymi obiektami arytmetycznymi, geometrycznymi lub algebraicznymi. Są zwykle zdefiniowane jako szeregi Dirichleta lub iloczyny Eulera zbieżne na pewnej półpłaszczyźnie, które posiadają przedłużenie meromorficzne na całą płaszczyznę zespoloną i spełniają równanie funkcyjne typu riemannowskiego. Historycznie rzecz ujmując pojawiły się po raz pierwszy w klasycznych pracach Eulera, Dirichleta i Riemanna. Prawdopodobnie najbardziej znanym przykładem funkcji L jest funkcja dzeta Riemanna. Dzięki przełomowym pracom wielu znanych matematyków takich jak R. Dedekind, E. Artin, E. Hecke oraz R. Langlands, by wymienić tylko kilku, funkcje L stały się ważnym narzędziem w badanich problemów arytmetycznych i obecnie zajmują centralne miejsce w nowoczesnej teorii liczb.

W 1989 roku A. Selberg zdefiniował aksjomatycznie klasę funkcji, obecnie zwaną *klasą Selberga* i oznaczaną symbolem $\mathcal{S}$, która przypuszczalnie zawiera wszystkie funkcje L ważne z punktu widzenia teorii liczb. W chwili obecnej precyzyjny opis elementów klasy $\mathcal{S}$ jest znany w bardzo ograniczonym zakresie. Główne hipotezy z tym związane przewidują, że stopień każdej funkcji L z klasy Selberga jest nieujemną liczbą całkowitą (*Hipoteza o Stopniu*), oraz że wszystkie funkcje L stopni całkowitych pochodzą od reprezentacji automorficznych grup arytmetycznych (*Ogólne Twierdzenie Odwrotne*). Stosunkowo łatwo jest opisać strukturę klasy $\mathcal{S}$ dla stopni $d < 1$. Opis ten wynika z klasycznych rezultatów H.-E. Richerta i S. Bochnera z lat 50. ubiegłego wieku i został podany przez B. Conreya i A. Ghosha w 1990 r. Dalszy postęp przyniosły prace J. Kaczorowskiego i A. Perelliego, którzy potwierdzili prawdziwość zarówno Hipotezy o Stopniu jak i Ogólnego Twierdzenia Odwrotnego dla stopni mniejszych od 2. W niedawnej pracy (2020), która nie jest jeszcze opublikowana, uzyskali całkowity opis funkcji L stopnia 2 o przewodniku równym 1, potwierdzając Ogólne Twierdzenie Odwrotne także i w tym przypadku.

Głównym celem obecnego projektu badawczego jest dokonanie dalszego postępu w badaniu struktury klasy $\mathcal{S}$. Zasadniczym obiektem badań będą funkcje L stopnia 2 o przewodnikach większych od 1. Dobrze znane twierdzenie A. Weila sugeruje, że celowe dla ich badania będzie opisanie własności splotów funkcji L z charakterami Dirichleta. Pojawia się tu wiele problemów, które wymagają wyjaśnienia. Dla przykładu, nie wiadomo, w jaki sposób podstawowe niezmienniki funkcji L zachowują się przy opisanej operacji splotu. W szczególności nie wiadomo, czy stopnie funkcji $F \in \mathcal{S}$ oraz jej splotu F^{χ}, zakładając, że należy on do $\mathcal{S}$, są sobie równe. Można przypuszczać, że tak jest, ale precyzyjny dowód tego faktu nie jest obecnie znany. Podobne problemy mogą być formułowane w odniesieniu do innych niezmienników takich jak na przykład przewodnik czy liczba pierwiastkowa. Mając za przykład klasyczne wyniki dotyczące funkcji L związanych z formami modularnymi Heckego i Maassa, można sformułować prawdopodobne przypuszczenia w tym zakresie. W proponowanym projekcie badawczym zamierzamy zmierzyć się z tymi, jak i innymi, pochodnymi problemami.

Równoległe kierunki badań w proponowanym projekcie badawczym będą koncentrowały się na teorii rozmieszczenia wartości funkcji L oraz ich zastosowaniach w teorii faktoryzacji. Wartości funkcji dzeta i funkcji typu L na argumentach z pasa krytycznego należą do najważniejszych przedmiotów badań analitycznej teorii liczb. Rozmieszczenie wartości tych funkcji było przedmiotem dociekań wielu matematyków w ostatnich dziesięcioleciach, ale mimo to nasza wiedza w tym zakresie jest wciąż dosyć ograniczona. Proponowane badania będą dotyczyły rozmieszczenia wartości rozmaitych uogólnień klasycznej funkcji dzeta Riemanna, dla których lista ciekawych problemów otwartych jest wciąż dosyć długa. Drugi z wymienionych równoległych kierunków badań będzie dotyczył własności faktoryzacyjnych w monoidach przemiennych. Monoidy o najprostszej strukturze, tj. monoidy wolne, to dokładnie te z jednoznacznością rozkładu. Będziemy badać niejednoznaczność rozkładu w samych monoidach analitycznych i to, jak się zachowują w konstrukcjach, gdzie nowe monoidy analityczne buduje się z innych. Spróbujemy też zmierzyć się z zagadnieniem własności faktoryzacyjnych jednego z najbardziej intrygujących monoidów: samej klasy Selberga.

Funkcje L mają zasadnicze znaczenie dla teorii liczb oraz geometrii algebraicznej. Funkcje dzeta są również rozważane w innych działach matematyki takich jak na przykład algebra, kombinatoryka, czy teoria układów dynamicznych. To pokazuje związki tematyki proponowanego projektu z innymi częściami matematyki i czyni ten kierunek badań tak ważnym i ciekawym.