Układ dynamiczny to matematyczny model zmian w czasie następujących według ustalonej reguły, w której nowy stan obiektu zależy tylko od jego stanu bieżącego, a nie od tego, co się np. wydarzyło w przeszłości. Układy dynamiczne są stosowane do opisu różnorodnych zjawisk, począwszy od lecącego pocisku, poprzez zachowania pojedynczych neuronów, skończywszy na fluktuacjach rozmiaru populacji zwierząt w łańcuchu pokarmowym. Rozwiązania tego rodzaju modeli, zwane trajektoriami, opisują zmiany stanów modelowanego obiektu lub ekosystemu jako funkcja czasu. Niestety, z wyjątkiem bardzo nielicznych przypadków, takich jak lot pocisku, nie daje się opisać tych rozwiązań wprost wzorami, a bezpośrednia analiza modelu jest czasochłonna i wymaga specjalistycznej wiedzy matematycznej. Dlatego też często stosuje się do tej analizy komputery. Niestety, w symulacjach numerycznych uzyskuje się rozwiązania przybliżone, które rzadko są matematycznie poprawne. Na domiar złego, niektóre ważne rozwiązania są niestabilne, tzn. niewielkie zaburzenie może spowodować oddalenie się trajektorii od rozwiązania, w związku z czym trudno się je znajduje i przybliża.

Głównym celem niniejszego projektu jest opracowanie pewnych narzędzi obliczeniowych służących do automatycznej analizy dynamiki, które mają na celu przede wszystkim uzyskanie wyników gwarantowanych matematycznie, a także zastsosowanie tych metod do analizy wybranych modeli. Taka metoda dostaje na wejściu równania modelujące dynamikę, wykonuje obliczenia i w wyniku tworzy katalog znalezionych najważniejszych rozwiązań. Metoda ta będzie bardzo pomocna dla naukowców, którzy tworzą modele matematyczne w celu uzyskania odpowiedzi na pytania typu: „Jaka ilość ryb odławianych z jeziora każdego roku nie spowoduje wyniszczenia populacji tych ryb?”

Automatyczna analiza dynamiki nie jest zadaniem oczywistym. Jednen z problemów polega na tym, że komputery potrafią operować tylko na skończonych strukturach danych, więc wszystko musi być opisane w taki sposób. Podstawowym pomysłem jest tu prowadzenie analizy dynamiki na ograniczonym obszarze podzielonym na kostki – jak papier w kratkę. Wtedy zmiany stanów w układzie dynamicznym mogą być opisane jako regły, które określają, do jakiej kratki należy przejść z każdej kratki na kartce. Z kolei do znalezienia rozwiązań niestabilnych stosujemy Topologię. Jest to dziedzina matematyki, która przede wszystkim dotyczy pojęcia ciągłości. Rozumowanie stosowane tutaj jest ideologicznie analogiczne do następującego faktu: Jeżeli trzymamy jeden koniec sznurka pod wodą (wysokość < 0 względem powierzchni wody), a drugi koniec w powietrzu (wysokość > 0), to wtedy na sznurku musi być punkt dokładnie na powierzchni wody (wysokość $= 0$). Takie rozumowanie działa też w abstrakcyjnych rozumowaniach matematycznych, lecz jest oczywiście bardziej subtelne. Jako wynik zastosowania tych metod uzyskuje się udowodnione matematycznie informacje dotyczące stanów równowagi, zachowań okresowych i trajektorii stabilnych i niestabilnych.

Inny temat dotyczy dynamiki chaotycznej. Istnienie rozwiązań sprawiających wrażenie błądzenia przypadkowego, mimo że faktycznie układ jest deterministyczny (zadany przez równania), bardzo zależy od konkretnych wartości parametrów układu dynamicznego. Ocena faktycznej ilości parametrów dających takie rozwiązania jest wysoce nietrywialnym zadaniem. Nawet jeżeli symulacje numeryczne wykazują zachowanie chaotyczne dla wielu parametrów, udowodnienie tego w sposób matematycznie ścisły okazuje się być niezwykle trudne. Krokiem w tym kierunku jest obliczenie ścisłego oszacowania na „ekspansywność” odwzorowania, tzn. na prędkość oddalania się bliskich sobie punktów w czasie. Poprzez połączenie znanych i nowych algorytmów z zaawansowanymi obliczeniami numerycznymi, mamy zamiar wypracować efektywną metodę, dzięki której będzie można uzyskać dokładne oszacowania przy umiarkowanym koszcie obliczeń.

Szczególnie interesującym zjawiskiem, które zamierzamy badać, jest tzw. wędrówka chaotyczna. Występuje ona wtedy, gdy trajektorie przebywają przez dłuższy czas w pewnych stanach, a potem wędrują w sposób trudny do przewidzenia, aż zostaną przyciągnięte do innego stanu. Ale nie zatrzymują się tam na stałe: po pewnym czasie następuje następne przejście i powtarza się to bez żadnego wyraźnego wzorca. Mamy zamiar przyjrzeć się modelom matematycznym, w których to zjawisko występuje, aby je lepiej zrozumieć. Takie układy dynamiczne są stosowane do wyjaśnienia pracy naszego mózgu: wędrówka chaotyczna odpowiada przechodzeniu w rozmyślaniu od jednej myśli do innej, a także wpadaniu na nowe pomysły. Modele te są również stosowane w sztucznej inteligencji (neuro-robotyce) w projektowaniu spontanicznych zmian zachowania robotów. Potrzebujemy więc lepszego zrozumienia różnych modeli zanim pozwolimy robotom stosować je do działania w sposób nieprzewidywalny.