

Granice Jagłoma dla wielowymiarowych procesów Lévy'ego

Streszczenie popularnonaukowe

Przedmiotem naszych badań jest zachowanie procesów losowych w długim horyzoncie czasowym pod warunkiem pozostania dostatecznie długo w pewnym ustalonym zbiorze. W niniejszym projekcie skupimy się na szczególnej klasie zwanej procesami Lévy'ego oraz na zbiorach będącymi stożkami wielowymiarowymi o wierzchołku w początku układu współrzędnych. Dla związualizowania problemu możemy myśleć o sytuacji trójwymiarowej, gdzie stożek jest łatwy do wyobrażenia i o procesie losowym, który porusza się wewnątrz niego, przy czym rozważamy wyłącznie te sytuacje, w których nie wydostaje się on ze zbioru do chwili obserwacji. Mówiąc bardziej precyzyjnie, będziemy zajmować się istnieniem tzw. *granicy Jagłoma*, czyli granicznego rozkładu prawdopodobieństwa odpowiednio przeskalowanego procesu warunkowanego przeżyciem w stożku. Z punktu widzenia probabilistyki zagadnienie to powiązane jest z istnieniem tzw. *rozkładów kwazi-stacjonarnych*, które były intensywnie badane w przeciągu ostatnich kilkudziesięciu lat. Pod względem zastosowań można wymienić aspekt finansowy, gdzie, przykładowo, dany proces może opisywać cenę akcji albo kapitał ubezpieczyciela a naszym zadaniem jest stwierdzić, co się będzie z nimi działo przy założeniu, że owa cena nie spadnie do zera lub ubezpieczyciel nie zbankrutuje. Między innymi z tych powodów zagadnienie granicy Jagłoma badano dla wielu różnych rodzajów procesów losowych, zarówno w ciągłym jak i dyskretnym przypadku. Zwykle jednak badania te nie były spójne, tzn. każda kolejna grupa analizowanych procesów stochastycznych zazwyczaj wymagała innego podejścia i odmiennej analizy. Co więcej, w szczególnym przypadku analizowanych w tym projekcie procesów Lévy'ego z dwoma wyjątkami zajmowano się jedynie sytuacją jednowymiarową, z czego jeden z nich dotyczy wyłącznie zbiorów o ograniczonej objętości. Dopiero niedawno w 2018r. opublikowano pierwszą pracę, w której analizowano wielowymiarowe granice Jagłoma w stożku w przypadku, gdy analizowany proces jest stabilny i izotropowy.

Celem naszych badań jest uogólnienie dotychczas znanych wyników dotyczących warunkowego zachowania granicznego na anizotropowe wielowymiarowe procesy Lévy'ego, tj. na procesy nieposiadające przyjaznej, niezmienniczej na obroty struktury. Początkowo zajmiemy się rozszerzeniem wyniku na niektóre anizotropowe stabilne procesy Lévy'ego. Klasa ta spełnia tzw. warunek *samopodobieństwa*, co oznacza, że poprzez własność skalowania wystarczy badać proces tylko w jednej wybranej chwili czasu. Własność ta z jednej strony istotnie ułatwia pracę a z drugiej pojawia się często w opisach różnych zjawisk fizycznych i biologicznych. W tym kroku najpierw spróbujemy rozwinąć obecnie znane techniki, ale docelowo planujemy opracować nową metodę korzystającą z teorii zbieżności procesów losowych.

W następnym kroku zajmiemy się *stabilnością* uzyskanych w pierwszym etapie granic. Mianowicie, może się zdarzyć że dla niektórych procesów bez własności samopodobieństwa ale w pewnym sensie *podobnych* do pierwotnego, uzyskana granica Jagłoma okaże się być taka sama. Naszym zadaniem będzie poprawne zdefiniowanie owego *podobieństwa* oraz wykazanie, że warunkowany rozkład graniczny rzeczywiście jest identyczny. Spodziewamy się, że w tym etapie kluczową rolę odegra odpowiednie przeskalowanie procesu, gdyż wtedy przy założeniu jego odpowiednio *regularnego* zachowania się powinniśmy być w stanie owo podobieństwo pokazać.

Efektom naszej pracy będzie głębsze poznanie i zrozumienie granicznych zachowań procesów Lévy'ego. Spodziewamy się, że wyniki naszej pracy zainteresują naukowców pracujących w pokrewnej tematyce badań jak również osoby pracujące w zastosowaniach matematyki, przykładowo, w jej finansowym aspekcie. Ponadto liczymy na to, że metody, które planujemy opracować i wykorzystać znajdą zastosowanie w analizie różnych problemów probabilistycznych oraz w innych obszarach matematyki.