

Własności kombinatoryczne i strukturalne algebr Hecke-Kiselmiana streszczenie popularnonaukowe Magdalena Wiertel

Dla dowolnego skończonego zbioru $\{x_1, \dots, x_n\}$ rozważmy wszystkie słowa o literach z tego zbioru, to znaczy formalne ciągi postaci $x_{i_1} \cdots x_{i_n}$, z dodanym słowem pustym oznaczanym jako 1. W tym zbiorze można wprowadzić działanie dwuargumentowe, które dowolnej parze słów w oraz v przyporządkowuje słowo wv , powstałe przez napisanie najpierw w , a następnie v . Dodatkowo zakładamy, że $w1$ oraz $1w$ dla dowolnego słowa to w . Ta operacja, zwana konkatencją, jest łączna, a zbiór wszystkich słów z opisanym działaniem jest nazywany monoidem wolnym o generatorach x_1, \dots, x_n .

W monoidzie wolnym można dodatkowo utożsamiać ze sobą pewne słowa tak, by po uwzględnieniu tych utożsamień konkatencja pozostała dobrze zdefiniowana oraz łączna. To znaczy, można określić generatory oraz relacje między nimi. Gdy monoid jest skonstruowany w ten sposób, mówimy że jest on zadany przez prezentację. Na przykład, monoid o prezentacji $\langle x : x^2 = x \rangle$ ma dokładnie dwa elementy 1 oraz x , a mnożenie w tym monoidzie jest wyznaczone przez warunki $x1 = 1x = x$ oraz $xx = x$.

Podobne konstrukcje różnych struktur algebraicznych występują w wielu działach matematyki, takich jak kombinatoryka, geometria, topologia oraz algebra. Jednym z ważnych przykładów jest grupa warkoczy (oraz monoid warkoczy), która została wprowadzona jako matematyczny opis warkoczy o ustalonej liczbie nici.

Celem projektu jest zbadanie kombinatorycznych aspektów pewnej klasy monoidów zadanych przez prezentację związaną z relacjami typu warkoczowego oraz struktury algebr półgrupowych z nimi związanych. Zajmiemy się algebraми Hecke-Kiselmiana, które zostały zdefiniowane jako wspólne uogólnienie dwóch innych klas o podobnych własnościach algebraicznych. W uogólnieniu tym prezentacja jest związana z obiektami kombinatorycznymi, zwanymi digrafami. Każdy digraf składa się ze skończonego zbioru wierzchołków, graficznie przedstawianych w postaci kropek, oraz zbioru krawędzi, oznaczanych jako linie lub strzałki pomiędzy wierzchołkami. Każda krawędź łączy dwa różne wierzchołki i może być nieskierowana, gdy łączy symetrycznie dwa wierzchołki lub skierowana, gdy jeden z wierzchołków jest jej początkiem, a drugi końcem. Monoid Hecke-Kiselmiana związany z digrafem jest zadany przez generatory odpowiadające wierzchołkom, takie że $x^2 = x$, oraz relacje w zależności od krawędzi między wierzchołkami. W szczególności monoid dwuelementowy opisany w pierwszej części opisu to monoid Hecke-Kiselmiana pochodzący od digrafu składającego się z jednego wierzchołka.

Opisana klasa monoidów posiada związki z półgrupowymi odpowiednikami słynnych grup Coxetera, które zostały wprowadzone do opisu grup pewnych odbić. Monoidy Hecke-Kiselmiana pojawiają się również w teorii reprezentacji algebr skończenie wymiarowych, to znaczy w teorii, która bada struktury algebraiczne przez reprezentowanie ich elementów w postaci macierzy. Ponadto, ze względu na związki z monoidem warkoczowym, niektóre monoidy Hecke-Kiselmiana posiadają interesującą interpretację graficzną.

W ramach projektu badane będą różne własności monoidów Hecke-Kiselmiana w zależności od własności odpowiadających im digrafów. Pierwsza część projektu poświęcona będzie kombinatorycznym własnościom monoidów pochodzących od digrafów, które posiadają jedynie skierowane krawędzie. Planowane jest obliczenie wymiaru Gelfanda-Kirillova algebr Hecke-Kiselmiana. Wymiar ten stanowi jeden z podstawowych niezmienników w badaniu algebr skończenie generowanych. W przypadku algebr pochodzących od monoidów nieskończonych, dostarcza on informację o złożoności monoidu. Kolejnym celem jest zbadanie tak zwanych relacji Greena w klasie monoidów Hecke-Kiselmiana.

W drugiej części projektu zbadane zostaną różne aspekty związane ze skończonością dowolnych monoidów Hecke-Kiselmiana. Jednym z nich jest warunek stabilizacji rosnących ciągów ideałów, zwany noetherowskością, który posiada głębokie konsekwencje dla struktury oraz reprezentacji algebr. Planowane jest rozszerzenie charakteryzacji noetherowskich algebr Hecke-Kiselmiana, znanej dotychczas w przypadku algebr pochodzących od digrafów zorientowanych. W pełnej ogólności problem rozstrzygnięcia, czy monoid zadany przez prezentację jest skończony, jest bardzo trudny. W przypadku monoidów Hecke-Kiselmiana są znane jedynie częściowe rozwiązania. W ramach projektu planowane są nowe wyniki dotyczące tego zagadnienia.