Wokół hipotezy Karlssona-Nussbauma

Streszczenie popularnonaukowe

Przekształcenia nieoddalające, tzn. 1-lipschitzowskie, obok izometrii oraz kontrakcji tworzą jedną z podstawowych klas odzworowań nieliniowych. Ciekawym zagadnieniem jest badanie dynamiki takich odwzorowań względem różnych przestrzeni metrycznych.

Przykładowo dobrze znane twierdzenie Banacha o punkcie stałym opisuje zachowanie orbit odwzorowań zwężających w przestrzeniach metrycznych zupełnych. Innymi słowy, jeżeli f jest kontrakcją, to istnieje dokładnie jeden punkt stały odwzorowania f taki, że dla dowolnego x ciąg kolejnych iteracji, tzn. $x, f(x), f(f(x)), f(f(f(x))), \ldots$ jest zbieżny do tego punktu stałego. Co można powiedzieć o zachowaniu się odwzorowań nieoddalających? Takie odwzorowania stanowią graniczny przypadek w teorii odwzorowań zwężających, gdy stała Lipschitza dąży do 1 i ich dynamika jest znacznie bardziej skomplikowana. W przypadku, gdy mamy do czynienia z odwzorowaniem nieoddalającym niezbędne są dodatkowe założenia, aby np. zagwarantować istnienie punktu stałego. Co więcej nawet, gdy istnieje taki punkt odwzorowania f ciąg kolejnych iteracji f^n generalnie nie jest zbieżny do punktu stałego. Potwierdzeniem złożoności dynamiki odwzorowań nieoddalających jest fakt, że badania asymptotycznego zachowania tych odwzorowań są jednymi z najczęściej prowadzonych w analizie nieliniowej. Dotychczasowe badania były przeważnie prowadzone albo w przestrzeniach Banacha, w przestrzeniach CAT(0), albo w przestrzeniach z metryką, zwykle typu hiperbolicznego.

Jednym z kluczowych twierdzeń, które odnosi się do dynamiki odwzorowań nieoddalających jest twierdzenie Wolffa-Denjoya. W klasycznej wersji głosi ono, że jeżeli przekształcenie holomorficzne f, które odwzorowuje koło jednostkowe w siebie nie posiada punktów stałych, to istnieje punkt na okręgu ξ taki, że dla dowolnego x ciąg kolejnych iteracji $f^n(x)$ jest zbieżny do ξ. Powyższe twierdzenie jest obiektem zainteresowań wielu badaczy i przez lata zostało uogólnione w różnych kierunkach m.in. na zbiory ściśle wypukłe w $\mathbb{R}^n$ względem metryki Hilberta, czy na zbiory ściśle wypukłe w $\mathbb{C}^n$ względem metryki Kobayashiego.

Interesującą klasą przestrzeni metrycznych, w których każde dwa punkty można połączyć krzywą o długości równej odległości pomiędzy tymi punktami są przestrzenie geodezyjne. Dzięki szeregowi własności takich przestrzeni można spojrzeć na problem dynamiki odwzorowań nieoddalających w sposób bardziej jednolity i ogólny.

Idąc krok dalej w rozważaniach dynamiki odwzorowań nieoddalająych możemy mówić o hipotezie Karlssona-Nussbauma, która jest głównym tematem tego projektu, a zarazem głównym problemem w tym obszarze badań. Hipoteza Karlssona-Nussbauma głosi, że dla skończonej przestrzeni metrycznej Hilberta istnieje wypukły zbiór Λ zawarty w brzegu wypukłego zbioru D, taki że punkty skupienia orbit odwzorowań nieoddalających nieposiadających punktów stałych leżą w Λ. Uzasadnienie powyższej hipotezy oraz próba zaproponowania jej odpowienika względem innej przestrzeni metrycznej na pewno doprowadziłoby do znaczącego postępu w badaniach analizy nieliniowej.