Arytmetyczne i dynamiczne własności ciągów podstawieniowych

W 1761 r. Lambert pokazał, że liczba π jest niewymierna, i co za tym idzie jej cyfry w zwykłym rozwinięciu dziesiętnym nie powtarzają się okresowo. Czy każda cyfra pojawia się w tym rozwinięciu nieskończenie wiele razy? Wszyscy wierzą, że tak, dlatego że nikt się nie spodziewa, by rozwinięcie dziesiętne π miało jakiekolwiek szczególne właściwości, nikt nigdy nie zaobserwował żadnej regularności w tym rozwinięciu, i zatem jest ono zapewne „losowe". Rzecz jasna, terminu „losowe" nie można tu rozumieć w sposób ścisły, ostatecznie cyfry π są ustalone i nie powstają w wyniku jakiegoś procesu losowego, sądzimy jednak, że są „kwazilosowe", co znaczy, że pod wieloma względami zachowują się jak ciąg losowy. Dla przykładu, oczekujemy, że po każdej cyfrze 2 cyfra 1 występuje z grubsza tak samo często, co cyfra 3, a także że gdzieś w rozwinięciu występują dowolnie długie bloki sąsiednich siódemek. Stwierdzenia takie są zwykle nadzwyczaj trudne w dowodzie; w przypadku π nie wiadomo nawet, czy każda cyfra występuje nieskończenie wiele razy; tak samo rzecz się ma z $\sqrt{2}$ lub jakąkolwiek inną niewymierną liczbą algebraiczną. Analogicznie spodziewamy się, że liczby czy ciągi mające proste rozwinięcie w jednej bazie (np. potęgi dziesiątki) powinny mieć skomplikowane (lub kwazilosowe) rozwinięcia w innej (multyplikatywnie niezależnej) bazie. Stwierdzeń takich nie należy traktować zbyt dosłownie – ostatecznie potęga dziesiątki jest zawsze parzysta, więc jej ostatnia cyfra w rozwinięciu binarnym jest zawsze równa 0; podobnie, jeśli liczba rzeczywista ma okresowe rozwinięcie dziesiętne, to jest wymierna, i zatem jej rozwinięcie w dowolnej innej bazie również jest (w końcu) okresowe. W innych przypadkach będziemy mieli podobne „oczywiste" związki; oczekiwanie zachowania kwazilosowego znaczy tyle, że spodziewamy się, że nie wystepują jakiekolwiek nieoczywiste związki.

Na szczęście nie wszystkie problemy dotyczące wzajemnych relacji pomiedzy rozwinięciami w dwóch bazach są beznadziejnie trudne; wiele ważnych wyników udało się pokazać. Słynne twierdzenie Cobhama mówi o ciągach automatycznych, wyrazy których otrzymujemy poprzez zastosowanie pewnej skończonej procedury (automatu skończonego) do cyfr rozwinięć liczb naturalnych w danej bazie. Twierdzenie Cobhama głosi, że dowolny ciąg, który można w ten sposób otrzymać przy użyciu dwóch różnych (multyplikatywnie niezależnych) baz (na przykład bazy dziesiętnej i dwójkowej), musi być z konieczności bardzo prosty (w końcu okresowy).

Celem naszego projektu jest dalsze rozwinięcie powyższych badań dla szczególnych klas ciągów. Projekt ten znajduje się na przecięciu układów dynamicznych, kombinatoryki i teorii liczb. Nasze podejście do tych zagadnień będzie oparte o szerokie i systematyczne użycie narzędzi pochodzących z teorii układów dynamicznych. Interesować nas będą różne klasy ciągów uogólniające ciągi automatyczne, których definicja używa pojęcia bazy (choć termin „baza" trzeba tu rozumieć szeroko). Szczególne znaczenia mają tu ciągi podstawieniowe (dla których pojęcie bazy wciąż ma sens, choć baza ta nie musi być już liczbą całkowitą). Nasze badania podzielone są na następujące zadania:

A. Badanie problemu rozpoznawalności automatyczności ciągów podstawieniowych (problem ten został postawiony niedawno przez Allouche'a, Dekkinga i Queffélec).
B. Uogólnienie twierdzenia Cobhama na przypadek S-adycznych układów dynamicznych skończonej rangi (zwłaszcza dla układów S-adycznych stałej długości).
C. Badanie hipotezy Bella dotyczącej ciągów o skończonym k-wymiarze.
D. Uogólnienie wersji twierdzenia Cobhama dla ciągów k-regularnych na przypadek uogólnionych ciągów k-regularnych.

Mamy nadzieję, że nasze badania pozwolą na odkrycie nowych związków pomiędzy różnymi obiektami zdefiniowanymi w czysto arytmetycznych i dynamicznych kontekstach. Liczymy w szczególności na to, że uda nam się podkreślić wzajemne relacje pomiędzy dynamiką S-adyczną a pojęciami automatyczności i regularności.