

## **Randomizowane algorytmy numeryczne przybliżające rozwiązania równań różniczkowych zwyczajnych**

Równania różniczkowe zwyczajne (RRZ) są podstawowym narzędziem w matematycznym modelowaniu wielu zjawisk. Odgrywają ważną rolę w fizyce, chemii, biologii, technice, finansach i innych naukach. Analityczne rozwiązania RRZ pojawiających się w praktycznych zastosowaniach zwykle nie są znane, dlatego postępy w wielu dyscyplinach naukowych zależą od badań nad algorytmami numerycznymi dla równań różniczkowych. Warto zauważyć, że algorytmy randomizowane (którymi zajmujemy się w tym projekcie) mają, w stosunku do metod deterministycznych, dobre własności numeryczne przy bardzo słabych założeniach o funkcji prawej strony RRZ, co stanowi o ich szerokiej stosowalności.

Badania nad randomizowanymi algorytmami numerycznymi dla RRZ oparte są na podstawowych narzędziach i wynikach wielu gałęzi matematyki, w tym analizy rzeczywistej, algebry liniowej, teorii miary, teorii prawdopodobieństwa, statystyki matematycznej i oczywiście analizy numerycznej. Optymalność algorytmów jest badana w kontekście analitycznej złożoności obliczeniowej (Information-Based Complexity, IBC).

W tym projekcie skupiamy się na następujących zagadnieniach: analizie błędów i optymalności randomizowanych algorytmów przy informacji zaburzonej, stabilności tych algorytmów i statystycznym spojrzeniu na własności randomizowanych metod przybliżających rozwiązania RRZ (np. pasy ufności). Obszary te są obecnie intensywnie badane, jednak w dalszym ciągu nie są dostatecznie omówione w literaturze. Naszym celem będzie rozwiązanie wymienionych wcześniej problemów dla pewnych klas algorytmów randomizowanych.

Szczególną uwagę poświęcamy algorytmom optymalnym, tj. takim, których błąd (asymptotycznie) osiąga błąd minimalny (w pewnym sensie) w klasie wszystkich algorytmów spełniających pewne techniczne założenia. Wprowadzenie szumu informacyjnego do modelu jest istotne z punktu widzenia zastosowań. Informacja zaburzona może być na przykład użyta do matematycznego opisu obniżania precyzji obliczeń, co jest ważnym tematem w kontekście efektywnych obliczeń na procesorach graficznych.

Stabilność jest jedną z fundamentalnych własności badanych dla deterministycznych metod numerycznych dla RRZ. Mówi ona, czy błąd danej metody, użytej do aproksymacji rozwiązania RRZ przy ustalonej długości kroku całkowania, w długim okresie będzie ograniczony. Zaskakujący jest fakt, że przez długi czas koncepcja ta nie została zaadaptowana do metod randomizowanych. W naszym projekcie będziemy posługiwać się pojęciami probabilistycznych obszarów stabilności, które zostały wprowadzone w kontekście randomizowanych algorytmów dla RRZ w naszej niedawno opublikowanej pracy.

Planujemy również skonstruować pas, w którym (nieznane) dokładne rozwiązanie RRZ zawiera się z zadaniem prawdopodobieństwem (tzw. pas ufności) i zbadać własności przybliżonych wartości jako estymatorów punktowych dokładnych wartości szukanej funkcji. Ten ważny obszar jest wciąż w dużej mierze niezbadany. Mamy nadzieję, że nasze wyniki pomogą ocenić dokładność algorytmów randomizowanych i ułatwią efektywne symulowanie trajektorii rozwiązań RRZ.

Oczekiwany wpływ tego projektu jest podwójny. Po pierwsze wyniki teoretyczne będą stanowić wkład w matematyczną teorię metod numerycznych dla RRZ i mogą wyznaczyć kierunki dalszych badań. Z drugiej strony analizowane algorytmy mogą zostać zastosowane w praktyce do zagadnień innych nauk i symulacji rzeczywistych procesów (np. modeli rozprzestrzeniania się epidemii). Aspekty teoretyczne i praktyczne są ściśle powiązane, ponieważ matematycznie udowodnione własności algorytmów numerycznych pomagają rozstrzygnąć o ich stosowalności do danego problemu.