

Głównym celem projektu jest opracowanie szybkiego algorytmu znajdującego zwycięzcę w danej grze parzystości.

Czym jest gra parzystości? Jest to gra rozgrywana na grafie skierowanym przez dwóch graczy, którzy nazywają się Parzysty i Nieparzysty. Każdy wierzchołek grafu należy do któregoś z graczy i jest dodatkowo oznaczony dodatnią liczbą całkowitą nazywaną priorytetem. Gra rozpoczyna się z ustalonego wierzchołka, a następnie gracze poruszają się przechodząc krawędziami grafu; porusza się zawsze właściciel aktualnego wierzchołka, przechodząc wybraną krawędź do kolejnego wierzchołka. Gra toczy się w nieskończoność, w efekcie czego powstaje nieskończona ścieżka. W celu wyłonienia zwycięzcy sprawdzamy priorytety odwiedzonych wierzchołków. Konkretnie: patrzymy na najwyższy priorytet występujący nieskończenie wiele razy. Gracz Parzysty wygrywa, jeśli ten priorytet jest parzysty, w przeciwnym razie wygrywa gracz Nieparzysty.

Oczywiście nie możemy faktycznie grać w grę parzystości, ponieważ wymaga to nieskończonej ilości czasu. Możemy jednak spróbować „rozwiązać” daną grę, to znaczy znaleźć gracza, który może wygrać — który ma strategię wygrywającą. Możemy też spróbować opisać tę strategię wygrywającą.

Okazuje się, że gry parzystości odgrywają fundamentalną rolę w teorii automatów i w logice oraz mają zastosowania do weryfikacji i syntezy. Problem algorytmiczny znajdowania zwycięzcy w grach parzystości jest równoważny (istnieją redukcje w czasie wielomianowym) problemowi pustości dla automatów niedeterministycznych na drzewach nieskończonych z warunkiem parzystości, a także problemowi weryfikacji modelowej dla modalnego rachunku mi. Leży również u podstaw algorytmicznych rozwiązań problemu syntezy Churcha. Wpływ gier parzystości sięga stosunkowo dalekich obszarów informatyki, takich jak procesy decyzyjne Markowa i programowanie liniowe.

Od dłuższego czasu otwarte jest pytanie, czy gry parzystości można rozwiązywać w czasie wielomianowym. W przypadku większości pytań algorytmicznych albo mamy szybkie (wielomianowe) algorytmy, albo mamy dowód, że nie istnieje żaden szybki algorytm (NP-trudność). Dla gier parzystości tak nie jest: nadal istnieje możliwość opracowania algorytmu wielomianowego.

Celem projektu jest rozwiązanie tego problemu: albo pokazanie algorytmu wielomianowego, który będzie znajdował zwycięzcę w grach parzystości, albo udowodnienie ograniczenia dolnego (trudności) odpowiadającego najlepszym znanym ograniczeniom górnym. Chociaż osiągnięcie tego ostatecznego celu może być trudne, mamy nadzieję na liczne częściowe wyniki: ulepszenie istniejących algorytmów, a także poprawę istniejących ograniczeń dolnych. Ponadto, oprócz gier parzystości, chcemy zbadać inne gry o podobnym charakterze: gry mean-payoff, gry discounted-payoff i proste gry stochastyczne; w przypadku tych gier chcemy odpowiedzieć na podobne pytania.

Złożenie wniosku o niniejszy projekt jest bezpośrednio motywowane przez zaproponowany niedawno przełomowy algorytm rozwiązujący gry parzystości w czasie kwazi-wielomianowym (to znaczy w czasie $n^{\log n}$, czyli co prawda nie wielomianowym, ale dość bliskim wielomianowemu) i przez pewne wyniki uzyskane bezpośrednio po nim. Te ostatnie wyniki rozjaśniają niektóre aspekty gier parzystości, ale jednocześnie wprowadzają kilka nowych pomysłów, które można wypróbować, aby w pełni zrozumieć problem rozwiązywania gier parzystości.

Badania realizowane w projekcie będą miały charakter teoretyczny, polegać będą głównie na wymyślaniu i dowodzeniu twierdzeń. Ponadto chcemy również napisać programy implementujące niektóre z opracowanych algorytmów.