Oszacowania procesów stochastycznych – podejście probabilistyczne i geometryczne

Opis popularnonaukowy

Rafał Meller

Zmienne losowe, czyli funkcje przypisujące zdarzeniom elementarnym liczby, są jednym z podstawowych obiektów rachunku prawdopodobieństwa. Może to być wynik rzutu monetą lub suma wyników w dziesięciu rzutach kostką. Może to też być cena uncji złota w następny wtorek o godz. 10. Często interesuje nas nie jedna zmienna losowa, a kilka naraz, albo jeszcze dokładniej, ewolucja pewnej wartości losowej w czasie. Dużo ciekawszym obiektem od zmiennej losowej

$$X = \text{cena uncji złota w następny wtorek o godz. 10},$$

jest proces stochastyczny

$$X_t = \text{cena uncji złota po czasie } t \text{ licząc od teraz},$$

który daje dużo więcej informacji o interesującej nas wielkości. Proces stochastyczny jest to rodzina zmiennych $(X_t)_{t\in T}$, gdzie T jest zbiorem indeksującym (często T jest podzbiorem półprostej $[0,\infty)$, co interpretuje się jako czas). Jedno z najciekawszych pytań związanych z wyżej wspomnianym procesem X_t brzmi: ile wynosi największa wartość X_t? W naszym przykładzie oznacza to: ile maksymalnie może kosztować uncja złota? Można to pytanie zapisać jako: jak duże jest $\sup_t X_t$? Zauważmy, że $\sup_t X_t$ to zmienna losowa. Nie istnieje jednoznaczne kryterium rozstrzygające, czy zmienna losowa jest "duża" czy "mała". W tym projekcie uznajemy, że $\sup_t X_t$ jest duże, jeśli wartość średnia (oczekiwana) jest duża. Najlepiej by było gdybyśmy obliczyli $\mathbb{E}\sup_t X_t$. Niestety to wyrażenie jest bardzo często zbyt skomplikowane by było to wykonalne bezpośrednio. Trzeba wtedy posiłkować się przybliżoną wartością $\mathbb{E}\sup_t X_t$. Projekt ten ma za zadanie dostarczyć "dokładnych" (dwustronnych) oszacowań wielkości $\mathbb{E}\sup_t X_t$ przy konkretnych założeniach o procesie $(X_t)_{t\in T}$. Będziemy też szukać oszacowań górnych (niekoniecznie dwustronnych) przez wielkości łatwo obliczalne w konkretnych przypadkach. W tym celu planujemy wykorzystać nową metodę szacowania supremów procesów losowych, stworzoną przez Ramona van Handela. Będziemy też się opierać na pomysłach i ideach wypracowanych przez Michela Talagranda, opisanych w jego najnowszej monografii.