Popularnonaukowe streszczenie projektu

Równanie dyfuzji opisuje procesy samorzutnego rozprzestrzeniania się w ośrodku cząstek, lub transportu niesionej przez nie energii, np. ciepła, będące konsekwencją chaotycznych zderzeń cząstek dyfundującej substancji między sobą i z cząsteczkami otaczającego je ośrodka. Przykładem dyfuzji są znane ze szkolnej fizyki ruchy Browna nazwane na cześć ich odkrywcy Roberta Browna, szkockiego botanika który w 1827 roku obserwował przez mikroskop ruch pyłków kwiatowych unoszących się na powierzchni wody – jego uwagę zwróciły przypadkowe ruchy ziaren pyłku występujące bez widocznej przyczyny wywołanej jakąś zewnętrzną siłą. Obecnie wiemy, że podobne zachowanie wykazują między innymi kropelki tłuszczu w mleku bądź drobiny pigmentu w rozpuszczalniku. Matematyczny opis ruchów Browna podali, niezależnie od siebie, Albert Einstein (1905) oraz polski fizyk Marian Smoluchowski (1906). Zauważyli oni, że przypadkowe błądzenie pyłków jest wywołane ich bombardowaniem przez cząsteczki wody, które są dużo mniejsze od pyłków kwiatowych, ale za to jest ich bardzo dużo i poruszają się bardzo szybko w nieuporządkowanych kierunkach. Różnice w prędkości ruchów oraz różna, a przy tym przypadkowa, liczba cząstek wody uderzających z poszczególnych stron w ziarno pyłku są przyczyną jego chaotycznych ruchów. Teoria Einsteina i Smoluchowskiego wytłumaczyła zjawisko dyfuzji (stanowiąc przy tym pierwsze ilościowe potwierdzenie hipotezy atomowej budowy materii) pozwalając wyprowadzić stosowne dla tego zjawiska równanie oraz wyjaśniając proporcjonalność pomiędzy czasem trwania procesu i średnim kwadratowym wychyleniem dyfundującej cząstki od jej początkowego położenia. Pojawiły się wszakże dwa zastrzeżenia. Pierwsze z nich ma znaczenie fundamentalne - ze wspomnianego równania wynika, że prędkość dyfundujących cząstek jest nieskończona - ich rozkład początkowo zlokalizowany w ograniczonym obszarze przestrzeni w każdej następnej chwili czasu staje się różny od zera w dowolnie odległym punkcie. Drugie zastrzeżenie pochodzi z obserwacji – prócz wspomnianej dyfuzji normalnej w wielu układach występujących w fizyce, chemii, biologii, a nawet w naukach społecznych pojawia się tzw. dyfuzja anomalna scharakteryzowana inną niż liniowa zależnością pomiędzy czasem i średnim kwadratowym odchyleniem od początkowego położenia. Powyższe przesłanki skłaniają do poszukiwania alternatywnego opisu procesów dyfuzji – zagadnienie to jest podstawowym celem mojego projektu ukierunkowanego na wprowadzenie i analizę własności równania opisującego anomalną dyfuzję zachodzącą ze skończoną prędkością.

W najprostszym przypadku skończona prędkość propagacji zakodowana jest poprzez obecność w odpowiednim różniczkowym równaniu ewolucji drugiej pochodnej po czasie – uogólniając w ten sposób równanie dyfuzji (co wymaga, dla uzgodnienia wymiarów, wprowadzenia charakterystycznej stałej czasowej τ) otrzymujemy tzw. równanie telegrafistów. Opisuje ono ruch falowy z tłumieniem i ma wiele praktycznych zastosowań, np. modeluje zanik sygnału w linii przesyłowej. Plusem równania telegrafistów jest to, że jako równanie hiperboliczne pokrewne równaniu falowemu zawiera w sobie skończoną prędkość propagacji. Przeniesienie tej koncepcji do teorii transportu ciepła, a także dyfuzji, prowadzi do równania znanego jako równanie Cattaneo. Fizyczna użyteczność rozwiązań tego równania uwarunkowana jest poprawnością ich interpretacji jako rozkładów prawdopodobieństwa oraz dopuszczalnością innej niż liniowa zależności pomiędzy średnim kwadratowym odchyleniem i czasem. Pierwsze z tych zagadnień trzeba rozstrzygać dla każdego przypadku oddzielnie i sprowadza się ono do badania normalizowalności i nieujemności odpowiednich funkcji. Rozwiązanie drugiego problemu sugeruje fakt, że inne niż liniowa zależności średniego kwadratowego odchylenia i czasu, z reguły typu potęgowego, można odtworzyć zastępując standardowe pochodne czasowe przez pewne wyrażenia całkowo-różniczkowe, które fizycznie można utożsamić z występowaniem w układzie efektów pamięci, a matematycznie (pod pewnymi dodatkowymi założeniami) z tzw. pochodnymi ułamkowymi. Postępowanie takie prowadzi do uogólnionego, zwanego też frakcyjnym, równania Cattaneo. Dlatego też podstawowym celem szczegółowym projektu jest znalezienie warunków implikowanych fenomenologią, informacją o własnościach i strukturze substancji w której zachodzi dyfuzja, a także analizą procesów stochastycznych leżących u fizycznych podstaw procesu, jakie powinny spełniać funkcje pamięci by zagwarantować istnienie, normalizowalność i nieujemność rozwiązań.