Nr rejestracyjny: 2020/39/B/ST1/00940; Kierownik projektu: dr hab. Mariia Vlasenko

Arytmetyka równań różniczkowych

Masha Vlasenko

Tematem łączącym różne kierunki w projekcie jest pojęcie *okresu*, czyli mówiąc nieprecyzyjnie stałej matematycznej opisanej w terminach geometrycznych. Na przykład, liczba $\pi = 3.1415\ldots$ jest okresem, gdyż opisuje związek pola powierzchni koła z jego promieniem. Z kolei liczba $e = 2.71828\ldots$, często definiowana za pomocą własności funkcji wykładniczej, najprawdopodobniej nie jest okresem, chociaż dowód tego jest poza zasięgiem metod dzisiejszej matematyki.

Mówiąc ściślej, okresy są objętościami obszarów w przestrzeni euklidesowej opisanych wielomianowymi nierównościami o wymiernych współczynnikach. Bardziej egzotyczne przykłady okresów to *całkowite wartości funkcji dzeta*, zdefiniowane jako nieskończone szeregi

$$\zeta(k) = 1 + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \cdots + \frac{1}{n^k} + \cdots \quad \text{for } k = 2, 3, 4, \ldots$$

choć nie jest to jasne na podstawie powyższej definicji. Euler udowodnił, że wartości $\zeta(2k)$ są wymiernymi wielokrotnościami π^{2k}, jednak niewiele wiadomo o wartościach funkcji dzeta dla k nieparzystego. W 1978 roku Roger Apéry udowodnił, że $\zeta(3)$ jest liczbą niewymierną, nadal natomiast nie wiemy czy $\zeta(5)$ jest wymierna. (Najprawdopodobniej nie ma nietrywialnych algebraicznych zależności pomiędzy $\zeta(k)$ dla k nieparzystego oraz π.) Analogiczny wynik dla p-adycznych stałych $\zeta_p(3)$ jest znany tylko dla liczb pierwszych $p = 2$ oraz 3, co pokazuje potrzebę rozwijania p-adycznych technik w teorii okresów.

Funkcje-okresy (ang. *period functions*) są rodzinami okresów zależącymi od jednego lub wielu parametrów. Spełniają one równania różniczkowe zwane *geometrycznymi* lub typu Picarda–Fuchsa, które biorą się z konstrukcji zwanej koneksją Gaussa–Manina, należącej do geometrii algebraicznej. Przykładowo, całka eliptyczna

$$\phi(t) = \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-t)}}$$

jest funkcją-okresem związaną z rodziną Legendre'a krzywych eliptycznych $y^2 = x(x-1)(x-t)$.

Jednym z głównych celów projektu jest badanie klasy okresów (tzw. stałych Frobeniusa), pojawiających się jako współczynniki macierzowe reprezentacji monodromii związanych z geometrycznymi równaniami różniczkowymi. Pracujemy nad teorią dającą niemal „kanoniczny" sposób wyrażenia stałych Frobeniusa w postaci całkowej. Mówiąc ściślej, są one okresami szczególnego rodzaju: tzw. całkami iterowanymi. Pojęcie to gra szczególną rolę w teorii reprezentacji topologicznej grupy podstawowej kilkukrotnie nakłutej płaszczyzny zespolonej.

Jednocześnie badamy p-adyczne własności funkcji-okresów, rozwijając nowe p-adyczne metody w badaniu okresów. Geometryczne równania różniczkowe mają silną własność, zwaną *strukturą Frobeniusa*, z której często biorą się ciekawe stałe p-adyczne. Niedawne eksperymenty numeryczne sugerują pewne jednostajne zachowanie tych stałych podczas gdy liczba pierwsza p ulega zmianie.

Niniejszy projekt wnosi kilka nowych idei do badania okresów. Poprzez ich rozwinięcie, mamy nadzieję pchnąć do przodu ten dział badań. Łączymy kilka klasycznych tematów, motywowanych przez geometrię arytmetyczną i topologię algebraiczną, z zaskakującymi przykładami arytmetycznymi pojawiającymi się w literaturze z ostatnich lat. Oczekujemy zatem, że nasze badania będą miały szerokie zastosowania w teorii liczb i kombinatoryce.