Zagadnienia badane w prezentowanym projekcie dotyczą własności rozmaitości Calabiego-Yau należących do najintensywniej badanych obiektów z zakresu geometrii algebraicznej, działu matematyki łączącego obiekty i metody algebry i geometrii. Zainteresowanie rozmaitościami Calabiego-Yau jest w znacznym stopniu inspirowane ich zastosowaniem w fizyce teoretycznej. Zgodnie z teorią superstrun wszechświat nie jest opisany przy pomocy czterech parametrów czasoprzestrzeni Minkowskiego, ale przy pomocy dziesięciu parametrów. Dodatkowych sześć parametrów (trzy parametry zespolone) opisują rozmaitość Calabiego-Yau czyli trójwymiarową rozmaitość zespoloną, spełniającą pewne warunki dające się wyrazić w terminach geometrii różniczkowej (grupa holonomii zawarta w grupie $SU(3)$) lub geometrii algebraicznej (trywialna wiązka kanoniczna, znikająca pierwsza liczba Bettiego).

Rozmaitości Calabiego-Yau wymiaru większego od 3 są znacznie słabiej zbadane, jedynymi przykładami dostępnymi w dowolnym wymiarze są rozmaitości otrzymane przez rozwiązanie osobliwości ilorazu produktu rozmaitości niżej wymiarowych przez działanie grupy skończonej oraz podwójnego nakrycia przestrzeni rzutowej $\mathbb{P}^n$ rozgałęzionego wzdłuż konfiguracji $2n + 2$ hiperpłaszczyzn. Rozmaitości Calabiego-Yau typu podwójne nakrycie są bardzo słabo zbadane, nie jest znana dokładna klasyfikacja dopuszczalnych typów osobliwości konfiguracji hiperpłaszczyzn, nie ma formuł na liczby Hodge'a, które są najważniejszymi niezmiennikami rozmaitości Calabiego-Yau (subtelniejszymi od liczb Bettiego).

Analogicznie jak w przypadku krzywych eliptycznych, które są jednowymiarowymi rozmaitościami Calabiego-Yau, w przypadku rozmaitości dowolnego wymiaru n możemy zdefiniować całki okresów, czyli całki $\int_\gamma \omega$ formy kanonicznej ω wzdłuż n-cykli $\gamma \in H_n(X, \mathbb{Z})$. Całki okresów są obiektami analitycznymi, pozostają jednak w bardzo ścisłych relacjach z własnościami arytmetycznymi rozmaitości Calabiego-Yau wyrażanymi przez twierdzenie o modularności stanowiące wyżej wymiarowy odpowiednik hipotezy Taniyamy-Shimury-Weila. Twierdzenie o modularności dowiedzione zostało jedynie w szczególnym przypadku rozmaitości Calabiego-Yau z $b_n = 2$ zdefiniowanych nad ciałem liczb wymiernych.

Pierwsze przykłady rozmaitości Calabiego-Yau z małą wartością bezwzględną charakterystyki Eulera (przewidywaną w teorii strun) zostały skonstruowane jako małe rozwiązania trójwymiarowych hiperpowierzchni stopnia 5 z prostymi punktami podwójnymi (tzw. kwintyki nodalne). Zagadnienie klasyfikacji nodalnych kwintyk w dalszym ciągu pozostaje zupełnie otwarte. Zaskakującą cechą nodalnych kwintyk jest to, że ich niezmienniki liczbowe zależą nie tylko od liczby ale również położenia osobliwości wyrażonego przez defekt. Konstrukcja małego rozwiązania osobliwości jest w swojej naturze analityczna, ustalenie czy dla danej rozmaitości nodalnej istnieje algebraiczne (rzutowe) rozwiązanie osobliwości jest zwykle bardzo trudne i wymaga wyznaczenia gładkich powierzchni generujących grupę Picrda badanej rozmaitości.

Jednym ze spektakularnych osiągnięć geometrii algebraicznej XX w. jest odkrycie związku między własnościami arytmetycznymi rozmaitości algebraicznych, a własnościami analitycznymi pewnych równań różniczkowych. Jednoparametrowej rodzinie rozmaitości Calabiego-Yau Y_t wymiaru n przypisujemy równanie różniczkowe zwane równanie Picarda-Fuchsa, spełniane przez całki okresów $t \mapsto \int_{\gamma_t} \omega_t$, gdzie $\gamma_t \in H_n(T_t, \mathbb{Z})$. W przypadku rodziny rozmaitości trójwymiarowych jest to równanie liniowe jednorodne rzędu 4, czyli równanie postaci

$$P_4(z)f^{(4)}(z) + P_3(z)f^{(3)}(z) + \cdots + P_1(z)f'(z) + P_0(z)f(z) = 0.$$

W ramach projektu zamierzamy zbadać następujące zagadnienia szczegółowe

• wyznaczenie formuł na liczby Hodge'a rozmaitości Calabiego-Yau typu podwójne nakrycie, zbadanie naturalnych rozwłóknień eliptycznych na rozmaitościach Calabiego-Yau typu Kummera lub podwójne nakrycie, uogólnienie konstrukcji produktu włóknistego wymiernych, jacobianowych powierzchni eliptycznych na przypadek produktu włóknistego rozwłóknień eliptycznych nad rozmaitościami wyższego wymiaru lub rozwłóknień wyżej wymiarowych nad prostą rzutową $\mathbb{P}^1$,

• zbadanie związków całek okresów na osobliwych elementach jednowymiarowych rodzin rozmaitości Calabiego-Yau ze specjalnymi wartościami form modularnych, konstrukcja przykładów nie-sztywnych modularnych rozmaitości Calabiego-Yau, interpretacja wyrazów macierzy monodromii operatorów Picarda-Fuchsa, wykorzystanie analitycznych metod teorii równań różniczkowych do badania modularności rozmaitości Calabiego-Yau z $b_n(X) > 2$,

• zastosowanie metod kombinatorycznych związanych z konfiguracjami płaszczyzn w $\mathbb{P}^4$ do klasyfikacji kwintyk nodalnych oraz do konstrukcji deformacji uniwersalnej, wyznaczenie liczb Hodge'a degeneracji nodalnych pewnych naturalnych klas rozmaitości Calabiego-Yau.