Własność rozszerzania a metody geometrycznej teorii funkcji

(Streszczenie popularnonaukowe)

Fundamentalne twierdzenie H. Cartana mówi, że każda funckja holomorficzna na analitycznym podzbiorze $\mathcal{V}$ obszaru pseudowpukłego Ω rozszerza się holomorficznie na cały obszar Ω. Nie jest jednak prawdą, że każda holomorficzna i ograniczona funkcja na $\mathcal{V}$ rozszerza się do funkcji holomorficznej i ograniczonej na Ω.

Jeszcze rzadziej się zdarza, by ograniczona funkcja holomorficzna rozszerzała się do ograniczonej funkcji holomorficznej o tej samej normie, a jeśli już tak jest, to zachodzi wówczas pewna specjalna zależność pomiędzy zbiorem analitycznym V i obszarem Ω. Pytanie o tę zależność, postawione przez W. Rudina w 1969, ma dwie istotne motywacje. Pierwsza z nich dostarczana jest przez teorię zbiorów spektralnych (m.in. nierówność von Neumanna dla komutujących operatorów na przestrzeniach Hilberta), druga natomiast leży w problemie interpolacyjnym Nevanlinny-Picka. Wiadomo, że zawsze istnieje rozmaitość (zbiór analityczny) $\mathcal{V}$ na którym wszystkie ekstremalne rozwiązania danego problemu interpolacyjnego istnieją, nierzadko zaś można zbiór $\mathcal{V}$ opisać, lub podać jakieś jego własności. Jeśli $\mathcal{V}$ miałby własność rozszerzania, to analizę problemu można rozbić na dwie części: znaleźć jedyne rozwiązanie na $\mathcal{V}$ a następnie badać, jak rozszerza się ono na cały obszar Ω.

Istnieje jeden prosty sposób konstruowania przykładów mających własność rozszerzania. Mówimy, że $\mathcal{V}$ jest retraktem analitycznym Ω jeśli istnieje odwzorowanie holomorficzne $r : \Omega \to \Omega$ takie, że obrazem r jest $\mathcal{V}$ oraz $r|_{\mathcal{V}}$ jest identycznością. Jeśli $\mathcal{V}$ jest analitycznym retraktem, to $f \circ r$ zawsze jest rozszerzeniem f do Ω zachowującym normę. W 2005 Agler i McCarthy opublikowali w Ann. of Math. pracę, której głowny wynik mówił, że jeśli Ω jest bidyskiem i $\mathcal{V}$ jest algebraiczny, to bycie retraktem analitycznym jest jedynym sposobem, by zbiór miał włanośc rozszerzania. Praca ta, przełomowa w tej dziedzinie, bazowała na metodach mających korzenie w Teorii Operatorów. Nie mają one szans na ugólnienia do innych obszarów, czy choćby nawet wyżej wymiarowych polidysków.

W 2019r. Agler, Lykova i Young wskazali obszar $\mathbb{C}$-wypukły, w którym występują zbiory mające własność rozszerzania i niebędące retraktami. Obszarem tym jest zsymetryzowany bidysk, zbiór postaci $G := \{(z + w, zw) : z, w \in \mathbb{D}\}$.

W przeciągu ostatnich lat poczyniony został duży postęp w rozwiązaniu postawionego przez Rudina problemu. Niemniej jednak wymaga on wciąż dalszej analizy, a jego badanie prowadzi do szeregu otwartych pytań i stawia dalsze hipotezy i problemy. To właśnie inspiruje i stanowi główną motywację niniejszego projektu.

Projekt składa się z czterech głównych zadań, a wokół każdego z nich znajdują się problemy o różnym stopniu trudności. Część na pewno jest w zasięgu dobrego doktoranta; inne wymagać będą zapewne nietrywialnych pomysłów i idei. Ale nawet częściowe rozwiązania będą interesujące i z całą pewnością przyczynią się do rozwoju tej teorii.

W atakowaniu i rozwiązaniu problemów postawionych w projekcie potrzebny będzie szeroki wachlarz narzędzi z analizy zespolonej i funkcjonalnej. Większość z nich jest standardowa, część wymagać będzie dopasowania czy udoskonalenia, a część, mamy nadzieję, zostanie rozwinięta podczas wykonywania projektu. Większość postawionych problemów jest natury czysto teoretycznej, choć niektóre mogą zostać rozwiązane za pomocą wspieranych komputerowo metod.