Twierdzenia Fatou dla funkcji i przekształceń harmonicznych oraz ich uogólnień
(popularnonaukowe streszczenie)

Funkcje harmoniczne należą do obszaru badań równań różniczkowych cząstkowych, a definiujące je równanie Laplaca jest jednym z bazowych równań, którego własności stanowią punkt odniesienia dla wielu innych równań różniczkowych typu eliptycznego i parabolicznego. Modele matematyczne wykorzystujące funkcje harmoniczne można spotkać na przykład: w teorii przepływu ciepła (rozkład temperatury), teorii fraktali, astrofizyce, opisie dynamiki lodowców, jak również w mechanice kwantowej.

Pojęcie funkcji harmonicznych jest rozważane w różnych kontekstach i przestrzeniach. W naszym projekcie szczególnie interesować nas będą funkcje na rozmaitościach oraz grupach typu Heisenberga. Teoria rozmaitości w dużym uproszczeniu bada geometrię obiektów z krzywizną, takich jak na przykład powierzchnie, sfery, torusy. Rozważania dotyczące krzywizny przestrzeni są jednym z fundamentów Ogólnej Teorii Względności oraz współczesnych badań nad rozwojem kosmosu i jego modelami. Grupy Heisenberga są ważną klasą grup nieprzemiennych modelowanych na przestrzeniach euklidesowych. Struktura tych grup prowadzi do ciekawych metryk oraz miar, a jednym z ich interesujących zastosowań jest model funkcjonowania kory wzrokowej.

Głównym zadaniem projektu jest badanie zachowania funkcji harmonicznych przy brzegu obszaru ich dziedziny. Pytania, na które będziemy starali się odpowiedzieć to m.in.: jak bardzo może oscylować funkcja harmoniczna w punktach blisko brzegu? Co oscylacje funkcji mówią nam o geometrii brzegu i czy charakteryzują pewne specjalne typy obszarów? Na te pytania poszukiwać będziemy odpowiedzi dla obszarów na rozmaitościach oraz w grupach typu Heisenberga. Podobne pytania będziemy rozważać dla funkcji p-harmonicznych - ważnego uogólnienia funkcji harmonicznych.

Innym kierunkiem uogólnienia funkcji harmonicznych są funkcje o wartościach wektorowych. Takie uogólnienie prowadzi do pojęcia przekształceń harmonicznych i p-harmonicznych. Przekształcenia te są związane z rachunkiem wariacyjnym i modelowaniem deformacji obiektów w przestrzeni. Okazuje się, że poszukiwanie deformacji, które wymagają najmniej energii prowadzi właśnie do przekształceń harmonicznych lub ich uogólnień. Dla takich przekształceń będziemy starali się zbadać ich brzegowe zachowanie, w szczególności zrozumieć strukturę zbioru punktów na brzegu, w których istnieją granice wartości przekształceń w odpowiednim sensie. Co więcej, dla takiego zbioru na brzegu obszaru będziemy badali związki między jego geometrią a geometrią samego obszaru.

Wyniki projektu pogłębią rozumienie brzegowego zachowania funkcji harmonicznych oraz ich uogólnień, szczególnie dla przestrzeni z krzywizną oraz pewnych grup nieprzemiennych. Badania będą wymagały rozwoju stosownych narzędzi z analizy harmonicznej oraz oszacowań wzrostu funkcji przy brzegu. Ponadto, nasze badania pogłębią zrozumienie teorii przekształceń.