Nr rejestracyjny: 2020/39/I/ST1/01566; Kierownik projektu: prof. dr hab. Adam Grzegorz Skalski

Kwantowe grupy, grafy i symetrie przez teorię reprezentacji

Adam Skalski i Moritz Weber

W ramach proponowanego projektu planujemy badać zjawisko kwantowych symetrii z różnych perspektyw: z punktu widzenia teorii reprezentacji, kombinatoryki, algebr operatorowych oraz kwantowej teorii informacji. Dzięki temu pogłębimy nasze szczegółowe zrozumienie grup kwantowych i ich przestrzeni splataczy; z jednej strony znajdziemy nowe przykłady takich obiektów, z drugiej zaś skonstruujemy nowe kanały kwantowe służące do matematycznego opisu przekazu kwantowej informacji; będziemy również badać niedawno wprowadzone pojęcie grafów kwantowych.

Przedstawmy najpierw kontekst naszego projektu. Symetrie w matematyce i naukach przyrodniczych spotyka się bardzo często i zawsze odgrywają one bardzo istotną rolę. Z matematycznego punktu widzenia tradycyjnie bada się je jako działania grup. Nowoczesne gałęzie fizyki i matematyki wymagają jednak ogólniejszego rozumienia symetrii, uwzględniającego efekty kwantowe. Dla naszego projektu odpowiedni formalizm zapewnia teoria grup kwantowych, rozwinięta w latach 80tych XX wieku. Skoncentrujemy się na definicji analitycznej, zaproponowanej przez słynnego polskiego matematyka Stanisława Lecha Woronowicza.

Jednym z podstawowych narzędzi badania grup kwantowych jest ich teoria reprezentacji, a mówiąc nieco bardziej technicznym językiem, ich przestrzenie splataczy. Wiele już o nich wiadomo, ale jednocześnie precyzyjne informacje są znane tylko w bardzo szczególnych przypadkach. W pierwszej części naszego projektu planujemy uzyskać takie dokładne wyniki dla szerokiej klasy tak zwanych "łatwych" czy "partycyjnych" grup kwantowych, zdefiniowanej około dziesięć lat temu, do której opisu można stosować metody kombinatoryczne i oparte na diagramach.

W drugiej części zajmiemy się badaniem uogólnień grafów. Grafy jako obiekty matematyczne są często wykorzystywane w naukach przyrodniczych. W ostatnich latach stopniowo wprowadzono ich uogólnienia do grafów kwantowych, te ostatnie nadal pozostają jednak stosunkowo tajemnicze. Zbadamy ich kwantowe symetrie oraz relacje z algebrami operatorów, a także powiążemy z nimi pewne nowe obiekty.

Trzecia, ostatnia część projektu dotyczy kanałów kwantowych, czyli matematycznych narzędzi opisujących transport informacji w kwantowej teorii informacji. Opierając się na konstrukcjach podanych w ostatnich latach opracujemy i zbadamy nowe ich przykłady związane z partycyjnymi grupami kwantowymi, przenalizujemy związaną z nimi produkcję entropii i podejmiemy próby głębszego zrozumienia ich związków z grupami kwantowymi i kategoriami tensorowymi.

Badania będą prowadzone przez polski zespół w Warszawie oraz niemiecki zespół w Saarbrücken. Obie grupy kontaktowały w przeszłości, uzyskując interesujące wyniki; projekt umożliwi sprawniejsze i bardziej systematyczne zorganizowanie dalszej współpracy naukowej. Przygotuje również grunt pod kontynuację wspólnych badań dla innych zespołów naukowych pracujących w instytucjach partnerskich.

Nasze interdyscyplinarne podejście oznacza, że uzyskane wyniki będą interesujące dla matematyków zajmujących się grupami kwantowymi i algebrami operatorów, a także dla fizyków matematycznych badających kwantową teorię informacji. Doprowadzi tym samym do pogłębienia naszej wiedzy o zjawiskach kwantowych postrzeganych z matematycznej perspektywy.