Uogólnienia i zastosowania rozkładu Białynickiego-Biruli

Joachim Jelisiejew
MIM UW

Jest wspaniałe, że prawa fizyki są niezależne od wyboru współrzędnych: eksperymenty powtórzone dziś dają te same wyniki co wczorajsze, prawa klasycznej mechaniki nie zależą od systemu współrzędnych, równania Maxwella są niezmiennicze na transformację Lorentza (co przyczyniło się do odkrycia szczególnej teorii względności). Te zjawiska nie są w żaden sposób oczywiste: klasyczne systemy teoretyczne dopuszczają modele bardzo zależne od współrzędnych.

To samo zjawisko zachodzi w matematyce i w szczególności w geometrii. Przyjmujemy tutaj, że nasz system jest kształtem lub rozmaitością, a jego niezmienniczość ze względu na zmiany współrzędnych daje zbiór transformacji systemu zwany *działaniem grupy*. Znowu, zwykle "ogólne" rozmaitości dopuszczają małą lub w ogóle zerową grupę działającą, zaś rozmaitości "często pojawiające się w praktyce" zwykły mieć duże działanie grup.

W danej rozmaitości z działaniem grupy możemy utożsamić punkt z jego obrazem przy każdej z transformacji, przykładowo jeśli działamy na $\mathbb{R}$ przez przesunięcie o 1, to identyfikujemy 0 z 1 z 2 itd., więc otrzymujemy okrąg $\mathbb{R}/\mathbb{Z} = S^1$. To utożsamienie często sprawia, że rozmaitość jest łatwiejsza do zrozumienia, np. mniejszego wymiaru, czy, jak w przykładzie powyżej, zwarta.

Celem niniejszego projektu jest badanie rozmaitości X poprzez działanie grupy. Jeśli mamy 1-parametrową rodzinę przekształceń $\{g_t\}$ rozmaitości X, możemy spytać, czy dla ustalonego $x \in X$ ciąg $g_t(x)$ ma granicę, "stan końcowy" x. Jeśli granica istnieje dla każdego punktu x, możemy pogrupować punkty wedle tego, jaka jest ich granica. Jest to podstawowa idea rozkładu Białynickiego-Biruli.

Naszym głównym celem w tym projekcie jest zastosowanie i uogólnienie tego rozkładu. Planujemy

1. zbadać uogólnienia rozkładu Białynickiego-Biruli z klasycznego przypadku grupy multiplikatywnej na przypadek grupy addytywnej.

2. zrozumieć ilorazy GIT i Chow rozmaitości z dużą grupą symetrii.

3. zastosować funktorialną wersję rozkładu Białynickiego-Biruli w bardzo osobliwych przypadkach.

Wszystkie trzy powyższe cele powinny dać nam lepsze zrozumienie geometrii przestrzeni z działaniem dużej grupy.