Popularnonaukowe streszczenie projektu

Zadziwiającą własnością praw przyrody jest fakt, iż proste modele zbudowane w oparciu o te prawa potrafimy opisać za pomocą formuł analitycznych. Mówimy, że takie modele są rozwiązywalne. Dzieje się tak dlatego, iż wśród praw przyrody mamy prawa zachowania. W przypadku modeli opisanych za pomocą równań różniczkowych zwyczajnych, prawa zachowania to całki pierwsze. Niektóre z tych prawa zachowania mają charakter uniwersalny. Na przykład, prawo zachowania energii ma taki właśnie uniwersalny charakter. Jednakże, nawet w przypadku prostych modeli, uniwersalne prawa zachowania nie wystarczają do tego byśmy mogli opisać je analitycznie. Na przykład, do rozwiązania problemu Keplera i zagadnienia dwóch ciał, nie wystarcza znajomość prawa zachowania energii, pędu i momentu pędu. Dodatkowe całki pierwsze dla problemu Keplera określone są wektorem Laplace'a–Rungego–Lenza. Jednakże, fakt istnienia tych całek nie jest wcale oczywisty.

Badania w projekcie poświęcone są problemowi w jaki sposób znajdować takie „nieoczywiste" całki pierwsze, w modelach, których ewolucję można opisać za pomocą równań różniczkowych zwyczajnych. Układy równań różniczkowych można znaleźć w niemalże każdej dziedzinie nauki począwszy od astronomii, fizyki, mechaniki, chemii, matematyki finansowej, a skończywszy na biologii czy też ekologii. Jeżeli badany model posiada całki pierwsze w ilości wystarczającej do jego opisu w analitycznej formie, to mówimy, iż taki model (lub odpowiadający mu układ równań różniczkowych) jest całkowalny. Pierwsze wyniki dotyczące obecności całek pierwszych i całkowalności można znaleźć już w słynnych *Principiach* Newtona. Od tego czasu wielu wybitnych matematyków i mechaników skupiło swoją uwagę na szukaniu jawnych rozwiązań równań różniczkowych opisujących znane układy fizyczne.

Poszukiwanie narzędzi umożliwiających rozróżnienie układów całkowalnych (o regularnej dynamice) od układów niecałkowalnych (o nieregularnej i chaotycznej dynamice) ma długą historię. Większość znalezionych metod ma poważne ograniczenia, gdyż albo pozwalają badać całkowalność tylko w bardzo wąskiej klasie funkcji lub też wymagają aby badany układ miał pewne szczególne własności, co znacznie ogranicza ich zastosowania. Dopiero pod koniec dwudziestego wieku pojawiły się efektywne narzędzia matematyczne pozwalające na badanie istnienia całek pierwszych. Jednym z nich jest teoria Moralesa–Ramisa. Pozwala ona uzyskiwać silne, konieczne warunki całkowalności sformułowanie w języku różniczkowej teorii Galois. Mogą one być wykorzystywane zarówno do dowodzenia niecałkowalności jak i do wyodrębniania klas układów podejrzanych o całkowalność.

Ze względu na trudności techniczne teoria Moralesa–Ramisa była stosowana na przykładach specjalnych klas układów hamiltonowskich. W projekcie proponujemy jej rozszerzenie na n-wymiarowe układy równań różniczkowych zwyczajnych. W szczególności wielowymiarowych układów hamiltonowskich w przestrzeniach zakrzywionych. Układy tego typu pojawiają się w teorii względności i kosmologii. Przykładowo, najbardziej znane rozwiązania równań Einsteina, metryki Schwarzschilda i Kerra, mają całkowalny strumień geodezyjny. Układy opisujące ruch punktów materialnych wzdłuż geodezyjnych są bardzo ważne w zrozumieniu geometrii rozmaitości. Badanie całkowalności i znajdowanie rozwiązań układów równań geodezyjnych stało się bardzo popularne ze względu na ich fizyczne znaczenie jako trajektorii masywnych cząstek poruszających się po różnych zakrzywionych rozmaitościach. Warto podkreślić, iż wykrywanie fal grawitacyjnych jest ściśle związane z opisem ewolucji w czasie odległości przestrzennej między dwoma ciężkimi punktami materialnymi na geodezyjnych w metryce Zipoya-Voorheesa.

Projekt ma charakter interdyscyplinarny. Warunki całkowalności wyrażają się przy pomocy zaawansowanego aparatu matematycznego: różniczkowej teorii Galois, obliczenia mają charakter numeryczny jak i symboliczny wymagający zastosowania algebry komputerowej. Opracowane metody, twierdzenia i algorytmy oraz znalezione nowe całkowalne przypadki będą interesujące zarówno dla specjalistów z teorii układów dynamicznych jak i naukowców z różnych działów nauk ścisłych i przyrodniczych wykorzystujących w swoich badaniach układy równań różniczkowych.