

OPTYMALNA REPREZENTACJA UKŁADÓW DYNAMICZNYCH

Teoria układów dynamicznych jest ważną gałęzią matematyki związaną z naukami inżynierskimi przyrodniczymi. Z natury układ dynamiczny składa się z *przestrzeni fazowej* i *reguły ewolucji*. Przestrzeń fazowa składa się ze wszystkich możliwych *stanów-świata* (np. lokalizacje i prędkości planet układu słonecznego), podczas gdy reguła ewolucji jest funkcją którą wysyła każdy stan świata, reprezentujący stan systemu “teraz” do stanu świata reprezentującego stan systemu “o jedną jednostkę później”. Pogoda, produkcja białych krwinek we krwi, ruch kul na stole bilardowym, ruch cząsteczek gazu w pojemniku, rozpuszczanie cukru w filiżance kawy, giełda, tworzenie się korków itd. są przykładami układów dynamicznych. Efektywne modelowanie oraz analiza układów w ramach metodologii naukowej zależy w pierwszej kolejności od procesu pozyskiwania danych z obserwacji (np. pomiaru ciśnienia w pojemniku zawierającym cząsteczki gazu). Ten proces musi skutkować *reprezentacją* układu. Bardzo istotne jest ustalenie, jak optymalnie pozyskać/przedstawić dany układ z punktu widzenia precyzji, wydajności, możliwości rekonstrukcji, ograniczeń przechowywania lub innych parametrów w zależności od konkretnych okoliczności. Celem projektu jest zbadanie optymalnej reprezentacji układów dynamicznych pojawiających się w fizyce matematycznej, stochastycznym oszczędnym próbkowaniu (ang. *compressed sensing*), dynamice topologicznej i dynamice symbolicznej. Projekt odpowiednio podzielono na cztery części.

Aby zilustrować wkład projektu, wyobraźmy sobie badacza obserwującego układ fizyczny (np. skomplikowany obwód elektryczny złożony z wielu prostych obwodów elektrycznych) poprzez pomiar wielkości związanej z systemem co sekundę (np. pomiar prądu elektrycznego w określonym miejscu w obwodzie). Jest to określane jako *opóźniony pomiar*, ponieważ polega na pomiarze tej samej wielkości w różnych (= "opóźnionych") czasach. Dużą wartość praktyczną ma zrozumienie, ile opóźnionych pomiarów (np. przez ile sekund mierzy prąd) trzeba wykonać, aby zebrać wystarczającą informację do symulacji (= reprezentacji) układu na komputerze. W pierwszej części projektu, po sformułowaniu problemu w sposób ściśle matematyczny, naszym celem jest znalezienie optymalnej (= minimalnej) liczby opóźnionych współrzędnych potrzebnych jako funkcja innych dostępnych cech układu, formalnie różnych *wymiarów* (np. liczba prostych obwodów w elektrycznym obwodzie w powyżej podanym przykładzie).

Podajmy kolejną ilustrację innej części projektu, która dotyczy reprezentacji *symbolicznych* układów dynamicznych (tz. przez ciągi zer i jedynek) które są zawsze pożądane, gdyż sprzyjają cyfrowemu przechowywaniu danych, które jest wykorzystywane w nowoczesnych komputerach. Jednak w przypadku większości układów dynamicznych precyzyjna reprezentacja symboliczna (powiązanie z każdym stanem układu *unikalnego* ciągu zer i jedynek w sposób ciągły, z poszanowaniem dynamiki) jest niemożliwa. Zamiast tego badamy kwestię znalezienia symbolicznego rozszerzenia *na* układzie (odwracając strzałkę powyższego odwzorowania, tz. łączenie zamkniętego zbioru ciągów zer i jedynek ze stanami układu w sposób ciągły, z poszanowaniem dynamiki), którego *złożoność*, jest najbardziej zbliżona do złożoności oryginalnego układu.

Podsumowując optymalna reprezentacja układów dynamicznych jest ważnym tematem w czystej matematyce wynikającym z praktycznych, lecz niezbędnych rozważań z różnych dziedzin nauk przyrodniczych i inżynierskich. Poprzez ustanowienie nowych, rygorystycznych wyników w tej dziedzinie, projekt przyczyni się do rozwoju dyscypliny matematycznej układów dynamicznych, a także posłuży jako podstawa teoretyczna, na której praktycy mogą polegać w celu uzyskania rzeczywistych ulepszonych procedur.