Nr rejestracyjny: 2020/38/E/ST1/00596; Kierownik projektu: dr Mikołaj Sierżęga

Różniczkowe Nierówności Harnacka - Nieliniowe i Nielokalne

Streszczenie Popularnonaukowe

Od czasów rewolucji newtonowskiej XVII wieku naukowy opis otaczającego nas świata fizycznego ujęty jest w języku matematyki. W trakcie następnych trzech stuleci ugruntował się pogląd, według którego podstawowe zależności w przyrodzie przyjmują postać relacji pomiędzy tempem zmian elementarnych wielkości takich jak energia, prędkość, gęstość czy ładunek. Równania tego typu należą do dziedziny równań różniczkowych. Nierzadko wyprowadzenie równania różniczkowego dla jakiegoś procesu fizycznego nie stanowi większego problemu. Jeżeli równanie przyjmuje szczególnie prostą postać jest nawet nadzieja na jawne wyznaczenie rozwiązania. Częściej, niestety, opis przyrody wymaga wyjątkowo trudnych nieliniowych równań różniczkowych cząstkowych. Równanie pola grawitacyjnego Einsteina czy równanie Naviera-Stokesa mechaniki płynów to tylko dwa słynne przykłady równań tego typu, które wciąż słabo rozumiemy.

W tym projekcie skupimy się na ważnej klasie równań parabolicznych, które znajdują zastosowanie w wielu obszarach badań m.in. przepływu ciepła, mechaniki cieczy, reakcji chemicznych, dynamiki populacyjnej, sieci społecznościowych czy rynków finansowych. W ogólności, próby rozwiązania równań tego typu są skazane na porażkę. Niemniej, w ciągu wielu dekad intensywnej pracy analitycznej matematycy nauczyli się analizować możliwe rozwiązania bez potrzeby ich jawnego wskazania. Jesteśmy w stanie powiedzieć czy rozwiązanie istnieje, czy nie, czy jest jedno, czy też jest ich wiele, czy są ciągłe i gładkie, czy też nieregularne i mają skoki, czy istnieją przez wieczność, czy też w pewnym momencie znikają lub kończą istnienie spektrakularnym wybuchem.

Pośród najbardziej przydatnych i poszukiwanych narzędzi analitycznych są tak zwane różniczkowe nierówności Harnacka, które pozwalają na porównanie wartości rozwiązania w dwóch różnych miejscach i w innych momentach. Gdy już dysponujemy taką informacją możemy wnioskować o wielu dalszych właściwościach równania, w tym o tworzących się osobliwościach czy maksymalnym czasie istnienia rozwiązań. Głównym celem badań jest wyprowadzenie nowych, ostrych różniczkowych nierówności Harnacka dla ważnej grupy nieliniowych i nielokalnych równań parabolicznych, w szczególności dla równania Fujity i ułamkowych równań ciepła. Następnie posłużymy się tymi oszacowaniami w celu uzyskania nowych rezultatów dla problemów otwartych w teorii istnienia i regularności rozwiązań półliniowego potoku ciepła. Zbadamy również intrygujące powiązania między różniczkowymi nierównościami Harnacka, teorią transportu optymalnego i wywodzącym się z termodynamiki pojęciem entropii.

W ciągu ostatnich dwudziestu lat teoria transportu optymalnego pozwoliła na głębsze zrozumienie szeregu fundamentalnych modeli fizyki matematycznej. Teoria potoków gradientowych względem metryki Wassersteina zainicjowana przez Jordana, Kinderlehrera i Otto dała nowy matematyczny wgląd w intuicyjnie zasadne przekonanie, że ewolucja układów fizycznych ma tendencję do optymalizowania szczególnych wielkości o fizycznym znaczeniu. Pośród rozmaitych wielkości, które mogą się monotonicznie zmieniać wraz z ewolucją układu niektóre są szczególnie użyteczne w matematycznej analizie równania. Teoria transportu optymalnego pomaga zindentyfikować obiecujące obiekty, a te z kolei okazują się być powiązane z ideą entropii.

Pojęcie entropii jest niezwykle użyteczne w badaniach nad równaniami modelującymi przepływ ciepła. W słynnej pracy o regularności rozwiązań równań parabolicznych z 1958 roku John F. Nash posłużył się obiektem związanym z rozwiązaniem, który przywodzi na myśl znaną z mechaniki statystycznej entropię Gibbsa. Nie tak dawno Grigorij Perelman posłużył się termodynamicznym rozumowaniem w celu wskazania funkcjonału entropii związanego z potokiem Ricciego, przełamując impas w pracach nad Hipotezą Poincaré. Pomimo tego, że pojęcie entropii odegrało kluczową rolę w tych ważnych dokonaniach pozostaje ono tajemnicze, a dla wielu równań nie ma jasności jak wskazać "właściwą" definicję.

Widoczne powiązania pomiędzy różniczkowymi nierównościami Harnacka, transportem optymalnym i entropią można dostrzec dla dwóch kanonicznych modeli przepływu ciepła: liniowego równania ciepła i równania ośrodków porowatych. Stosowne oszacowania są znane jako nierówności Li-Yau i Aronsona-Bénilana. Wiadomo też, że są ostre tj. najlepsze możliwe. Dla innych podstawowych równań takich jak np. równanie Fujity albo ułamkowe równanie ciepła nie jest jasne jak zdefiniować adekwatny funkcjonał entropii. W tym projekcie wykorzystamy fakt, że oszacowania Li-Yau i Aronsona-Bénilana są spełnione jako równości dla bardzo szczególnych rodzin rozwiązań, które posiadają swoje analogi dla klas równań półliniowych i nielokalnych. Zbadamy w jaki sposób charakterystyczne dla tych równań symetrie skalowania wsparte metodami energetycznymi mogą dostarczyć cennych wskazówek w drodze do uchwycenia właściwej postaci różniczkowych nierówności Harnacka.