

ANALIZA FAL BIEŻĄCYCH W PÓLLINIOWYCH PROBLEMACH ELIPTYCZNYCH

Jarosław Mederski

Projekt badawczy poświęcony jest badaniu fal bieżących w problemach eliptycznych pojawiających się w kondensatach Bosego-Einsteina i w nieliniowej optyce. Modele fizyczne są opisane równaniem Grossa-Pitajewskiego, równaniami Schrödingera oraz elektromagnetycznym równaniem falowym. Te modele są szeroko badane w fizycznej i inżynierskiej literaturze, jednakże jest potrzeba badań analitycznych z matematycznego punktu widzenia. Uzyskano ostatnio odpowiedź na pewne otwarte problemy, jednak nowe matematyczne pytania i wyzwania pojawiają się, które są ważne z fizycznego punktu widzenia.

Naszym pierwszym celem jest znalezienie szerokiej klasy nieliniowych zjawisk, dla których otrzymujemy fale bieżące rozwiązujące równanie Grossa-Pitajewskiego. Ponadto chcemy zbadać istnienie fal bieżących pod obecność zewnętrznego potencjału w kondensatach Bosego-Einsteina. Zamierzamy studiować również wielokrotność fal bieżących.

Po drugie, chcielibyśmy rozwinąć nowe pojęcie wielowymiarowych czarnych i ciemnych solitonów w \mathbb{R}^N . Następnie szukamy także dwuwymiarowych profili bieżącej fali elektromagnetycznej w nieliniowych ośrodkach opisanych równaniami Maxwella i odpowiednimi prawami materiału. W szczególności chcemy znaleźć profile uwzględniające nieliniowe zjawiska, być może zmieniające znak i zawierające nieliniowości piątego stopnia.

Projekt leży na przecięciu następujących obszarów badawczych: metod wariacyjnych, teorii spektralnej, równań różniczkowych cząstkowych, analizy funkcjonalnej i fizyki matematycznej. W szczególności stosujemy i rozwijamy następujące matematyczne narzędzia: teoria spektralna operatorów eliptycznych, regularność zagadnień eliptycznych, mocna zasada maksimum, zasada jednoznacznej kontynuacji, regularność Brezisa-Kato, lemat o górskiej przełęczy, teoria zapętlenia silnie nieokreślonych problemów, dualna metoda wariacyjna, technika minimalizacji na topologicznych rozmaitościach, w szczególności na rozmaitościach Pochożajewa, teoria Lusternik-Schnirelmana, genus Krasnosielskiego oraz stopień topologiczny.

Potencjalne zastosowania oczekiwanych wyników mogą prowadzić do lepszego zrozumienia fizycznych modeli, np. nieliniowej optyki lub kondensatów Bosego-Einsteina. Oczekiwany wynikiem pracy będzie możliwość analitycznego badania nowych nieliniowych zjawisk w kontekście fal bieżących, nowatorski koncept ciemnych i czarnych solitonów będzie rozwinięty razem z analitycznym uzasadnieniem, istnienie rozwiązań postawionych zagadnień oraz ich własności symetryczne. Zamierzamy rozwinąć podejście funkcjonalne, które pozwala na studiowanie bieżących fal za pomocą metod równań różniczkowych cząstkowych, gdzie nowe matematyczne narzędzia muszą być wypracowane. Jesteśmy przekonani, że te nowe metody pozwolą na badanie zagadnień z niezerowymi warunkami w nieskończoności, a w szczególności silnie nieokreślonych równań różniczkowych cząstkowych np. nieliniowego równania falowego, oraz będą przedmiotem zainteresowań specjalistów z obszarów wyżej wymienionych.

Oczekujemy, że wyniki projektu dadzą początek dalszym badaniom poświęconym dynamicznie równania Grossa-Pitajewskiego oraz nieliniowego elektromagnetycznego równania falowego.