

*Stabilność Ulama w algebrach operatorowych*

**Streszczenie popularnonaukowe**

W 1940 r. Ulam postawił pytanie o stabilność homomorfizmów grup, które wysłowić można następująco: czy odwzorowanie między dwiema grupami spełniające warunek homomorfizmu jedynie w przybliżeniu musi leżeć blisko pewnego homomorfizmu? Znacznie ogólniej problem Ulama formułuje się pytając, pod jakimi warunkami obiekt spełniający daną własność w przybliżeniu musi leżeć blisko obiektu spełniającego tę własność dokładnie.

Badanie tego typu pytań w przeróżnych aspektach dało przez szereg lat wiele interesujących zastosowań w analizie funkcjonalnej. Dla przykładu: odwzorowania quasi-liniowe okazały się fundamentalne dla badania sum skrętnych przestrzeni Banacha (teoria Kaltona-Pecka); prawie multiplikatywne operatory odegrały ważną rolę w zrozumieniu struktury i teorii kohomologii algebr Banacha (teoria B.E. Johnsona tzw. AMNM-par); przybliżone  $*$ -homomorfizmy zostały użyte przez Faraha przy rozwiązywaniu słynnego problemu automorfizmów wewnętrznych algebry Calkina; operatory prawie rzędu zerowego, czy też prawie zachowujące rozłączność, grają zaś istotną rolę elementów składowych przy określaniu wymiaru nuklearnego  $C^*$ -algebr (teoria Wintera-Zachariasza).

Projekt zakłada badania, w których każdy z wymienionych wyżej aspektów odegra pewną rolę. Naszym głównym celem jest bowiem rozszerzenie listy zastosowań problemów typu Ulama w analizie funkcjonalnej, zasadniczo w przypadku nieprzemiennym, tj. przy rozważaniu takich pytań w algebrach operatorowych. Problemy zawarte w projekcie można podzielić na cztery główne grupy:

- (a) problem podniesienia dla zwartych perturbacji półgrup operatorów, badany z wykorzystaniem modyfikacji klasycznej teorii Browna-Douglassa-Fillmore'a i z zastosowaniami do badania własności spektralnych operatorów Toeplitza;
- (b) stabilność  $*$ -homomorfizmów Jordana, badana przy użyciu metod uśredniających B.E. Johnsona zaadaptowanych do kohomologii trójek jordanowskich, a także jej konsekwencje w badaniach operatorów prawie rzędu zerowego z ewentualnymi zastosowaniami do teorii wymiaru nuklearnego  $C^*$ -algebr;
- (c)  $C^*$ -algebraiczna charakteryzacja własności stabilności Ulama homomorfizmów grup w oparciu o konstrukcję Browna i Guentnera  $C^*$ -norm uogólniających klasyczne konstrukcje grupowych  $C^*$ -algebr;
- (d) nieprzemienne wersje twierdzenia Kaltona-Roberts'a o prawie addytywnych funkcjach zbioru, gdzie rozważane są (orto)modularne kraty projekcji w algebrach von Neumanna, związki z liczbą pokryciową Kirchberga i ewentualne zastosowania do teorii rozszerzeń algebr von Neumanna.

We wszystkich wymienionych zagadnieniach rdzeń stanowi jakaś odmiana problemu Ulama, czy to spełnianie warunku półgrupowości modulo ideał operatorów zwartych – jak w problemie (a) – czy też przybliżone spełnianie równań charakteryzujących dane własności – jak w problemach (b)–(d). Motywacją do podjęcia projektu jest przede wszystkim naturalność postawionych pytań oraz ich potencjalne zastosowania w badaniach konkretnych obiektów, jak operatory Toeplitza czy nieprzemienenny wymiar  $C^*$ -algebr. Ciekawą konsekwencją może być także rozwinięcie już istniejących i ważnych teorii, jak np. teoria B.E. Johnsona operatorów prawie multiplikatywnych, czy teoria  $C^*$ -uzupełnień Browna i Guentnera. W projekcie znajdzie zapewne zastosowanie szerokie spektrum metod, takich jak metody algebry homologicznej, kombinatoryka czy teoria spektralna.