Znormalizowane rozwiązania półliniowych zagadnień eliptycznych

Jacopo Schino

Równanie Schrödingera zostało wprowadzone w 1926 roku, kiedy Erwin Schrödinger wyprowadził je z równania falowego. Od tego czasu było wiele zastosowań tego równania w różnych obszarach fizyki: na przykład równanie modeluje zachowanie stanów kondensacji Bosego-Einsteina lub opisuje propagację fali w nieliniowej optyce.

W tym samym czasie spotykamy wiele sytuacji, gdzie obiekty opisane rozwiązaniami równań Schrödingera mają tę samą przypisaną wielkość, którą nazywamy w ogólności *L^2-masą*. Dokładniej rzecz ujmując, ta wielkość opisuje np. zasilanie (w nieliniowej optyce) lub całkowitą liczbę atomów (kondensacja Bosego-Einsteina) we wspomnianym powyżej kontekście. Oprócz tego L^2-masa jest zachowywana razem z energią w ewolucyjnym (zależnym od czasu) równaniu Schrödingera.

Dlatego nie dziwi fakt, że rozwiązania równań Schrödingera z określoną masą są poszukiwane: takie rozwiązania nazywamy *znormalizowanymi rozwiązaniami*.

W projekcie badamy układy eliptycznych (tj. czasowo niezależnych) równań Schrödingera; takie eliptyczne układy pojawiają się podczas poszukiwania fal stojących, które rozwiązują odpowiednie ewolucyjne układy, tj. rozwiązania postaci $(x, t) \mapsto e^{-i\lambda t}u(x)$, gdzie λ jest chemicznym potencjałem. Podczas, gdy znormalizowane rozwiązania są zaangażowane, takie wartości λ nie są z góry zadanymi wielkościami, lecz częścią niewiadomą: z matematycznego punktu widzenia dzieje się tak ze względu na to, że pojawiają się one jako mnożniki Lagrange'a pochodzące z ograniczenia na L^2-masę.

W szczególności poszukujemy znormalizowanych *rozwiązań w stanie podstawowym*. Rozwiązanie w stanie podstawowym jest nietrywialnym (tj. nierównym zeru) rozwiązaniem, które minimalizuje energię wśród wszystkich nietrywialnych rozwiązań. Ważne znaczenie rozwiązań w stanie podstawowym pojawia się ze względu na naturalne zjawisko angażujące najmniejszą możliwą energię. Stąd stany podstawowe są w pewnym sensie jedynymi osiągalnymi stanami fizycznymi.

Skoro równanie Schrödingera modeluje kilka fizycznych zjawisk, rozważamy autonomiczne i nieautonomiczne zagadnienia z różnymi nieliniowościami oraz potencjałami. W problemach autonomicznych, gdzie potencjał jest zerowy, skupiamy się na nieliniowościach ze *nieskończoną masą*, tj. gdy nieliniowość jest ściśle podliniowa w zerze. To powoduje, że funkcjonał energii może przyjmować nieskończone wartości i wymaga argumentu aproksymacji. Odnoście nieautonomicznego problemu, koncentrujemy się na petencjałach singularnych, które zależą od pewnych lub wszystkich składowych zmiennej x. Używamy technik *ad hoc*, np. bazujących na nieautonomicznej rozmaitości typu Pohožaeva, lub przekształcamy te problemy w problemy równoważne i autonomiczne.

Oczekujemy na rozwiązania w stanie podstawowym dla zaproponowanych problemów i w celu osiągnięcia tego, rozwijamy nowe matematyczne techniki i/lub łączymy znane narzędzia z różnych obszarów i adaptujemy je do problemów znormalizowanych.