

Ważnymi obiektami w matematyce są pierścienie. Są to zbiory, w których można wykonywać dwa działania: dodawanie i mnożenie, które mają takie same własności jak zwykle dodawanie i mnożenie, za wyjątkiem przemienności mnożenia oraz możliwości dzielenia przez elementy niezerowe. Gdy mnożenie jest przemienne, a dzielenie jest wykonalne, to mówimy o ciele. Przekładem pierścienia są liczby całkowite \mathbb{Z} , a przykładem ciała liczby wymierne \mathbb{Q} . Jeśli pierścień zawiera w sobie podzbiór K będący ciałem (z tymi samymi działaniami), to nazywamy go algebrą nad ciałem K . Przykładem algebry jest algebra $\mathbb{Q}[X]$ wielomianów o współczynnikach wymiernych.

Moduł nad pierścieniem R to zbiór, w którym elementy można do siebie dodawać oraz mnożyć przez elementy pierścienia R . Jeśli pierścień R jest algebrą nad ciałem K , to moduł M nazywamy skończenie wymiarowym, jeśli istnieje skończenie wiele elementów m_1, \dots, m_d modułu M takich, że każdy inny element modułu M można uzyskać z wybranych elementów przez wykonywanie dodawania oraz mnożenia przez elementy ciała K . Najmniejszą liczbę d o tej własności nazywamy wymiarem modułu M . Ciąg m_1, \dots, m_d , dla którego osiągamy tę minimalną wartość, nazywamy bazą modułu M .

Jeśli ustalimy algebrę R wymiaru e nad ciałem K oraz liczbę d , to możemy przypisać każdemu d -wymiarowemu modułowi nad algebrą R ciąg ed^2 elementów ciała K , który opisuje mnożenie elementów modułu przez elementy algebry. Zbiór wszystkich ciągów, które można otrzymać w ten sposób, jest opisany przez równania wielomianowe, a więc jest rozmaitością afiniczną. Zbiór ten nosi nazwę rozmaitości d -wymiarowych R -modułów i jest oznaczany $\text{mod}_R(d)$. Ciąg przypisywany modułowi M zależy od wyboru bazy modułu M . Zbiór ciągów, które można otrzymać dla ustalonego modułu M , oznaczamy przez \mathcal{O}_M . Przez $\overline{\mathcal{O}}_M$ oznaczamy najmniejszą podrozmaitość afiniczną w $\text{mod}_R(d)$ zawierającą \mathcal{O}_M .

Głównym celem naszego projektu jest badanie własności rozmaitości $\text{mod}_R(d)$ oraz $\overline{\mathcal{O}}_M$. Powyższe problemy, które mają charakter geometryczny, zamierzamy badać, wykorzystując interpretację punktów rozmaitości jako modułów nad algebrą. Dzięki temu mamy cały wachlarz metod, głównie o charakterze homologicznym, gdyż własności (homologiczne) modułów często rzutują na własności (geometryczne) odpowiadających im punktów. Obserwacja ta była już wykorzystywana w przeszłości przez wielu autorów w badaniach geometrycznych. Zamierzamy kontynuować ten kierunek badań oraz rozwijać nowe metody, które pozwolą uzyskać głębsze wyniki.

Część naszych badań poświęcona będzie studiowaniu problemów o charakterze czysto homologicznym. Ważnym bowiem niezmiennikiem homologicznym związanym z algebrą jest jej kategoria pochodna. Będziemy badać równoważności kategorii pochodnych algebr pochodnie dyskretnych, dążąc do wykazania, że są one standardowe.