

"Koncentracja miary i nierówności funkcyjne"

Opis popularnonaukowy

Bartłomiej Polaczyk

Klasyczna obserwacja leżąca u podstaw współczesnego rachunku prawdopodobieństwa mówi, że jeśli wykonamy pewien losowy eksperyment wystarczająco wiele razy to otrzymany uśredniony wynik będzie bardzo blisko wartości oczekiwanej wyniku pojedynczego eksperymentu. Ta obserwacja została pierwotnie sformalizowana w terminach różnych praw wielkich liczb, które z natury są jakościowe, tzn. mówią że wraz ze wzrostem liczby prób zbliżamy się do wartości oczekiwanej, jednak nie mówią jak szybko się to odbywa. Umiejętność estymacji tego błędu jest kluczowa z punktu widzenia wielu zastosowań i duża część współczesnych badań jest poświęcona dowodzeniu dokładnych oszacowań tego typu.

Okazuje się, że w wielu sytuacjach można pokazać, że ograniczenie na prawdopodobieństwo tego, że błąd jest duży zanika bardzo szybko (tzn. co najmniej wykładniczo). Takie zjawisko jest pożądane, gdyż mówi nam ono, że nie potrzebujemy wielu prób do tego, aby otrzymać z dużym prawdopodobieństwem dokładne ograniczenie. Wszechobecność i siła tego typu oszacowań jest fascynującym zjawiskiem, nazywanym powszechnie koncentracją miary, który został zgrabnie opisany przez Michaela Talagrandą następującymi słowami

zmienna losowa zależna (w "gładki" sposób) od wpływu wielu niezależnych zmiennych (ale nie zbytnio od żadnej z nich) jest praktycznie stała

W praktyce jednak, powyższe założenia często okazują się zbyt restrykcyjne i mamy do czynienia z modelami zmiennych losowych, które są mocno zależne lub klasa rozpatrywanych funkcji jest znacznie szersza. Tego typu problemy mają miejsce w przypadku analizy modeli, które pojawiają się naturalnie w zastosowaniach, np. w mechanice statystycznej, sieciach społecznych, machine learningu, czy też biologii.

Celem tego projektu jest badanie nierówności koncentracyjnych i związków jakie zachodzą pomiędzy różnymi podejściami, które prowadzą do tychże nierówności. W szczególności, będziemy zajmować się następującymi zagadnieniami:

1. Koncentracja dla funkcji nie lipschitzowskich od zależnych zmiennych losowych.
2. Nierówności funkcyjne.

Pierwszym celem tego projektu jest badanie zjawiska koncentracji miary w kontekście probabilistyczno-kombinatorycznym. Będziemy analizować konkretne, głównie dyskretne, modele zależnych zmiennych losowych, które pojawiają się w naturalny sposób w zastosowaniach, oraz dowodzić ich własności koncentracyjne. Będziemy także poszukiwać wystarczających warunków koniecznych dla pewnych typów nierówności koncentracyjnych (np. koncentracji dla funkcji wypukłych i wielomianów) i pokazywać że są one spełnione w niektórych ważnych modelach, poprawiając oszacowania znane dotychczas.

Drugim celem tego projektu jest prowadzenie badań nad abstrakcyjno-analitycznym podejściem do koncentracji w postaci nierówności funkcyjnych. Można na nie patrzeć jako na łącznik pomiędzy teorią zbieżności procesów Markova, a własnościami koncentracyjnymi miar granicznych. Będziemy w szczególności analizować zależności pomiędzy różnymi nierównościami funkcyjnymi, znajdować ich charakterystyki oraz badać jakie własności koncentracyjne z nich wynikają.

W wyniku prowadzonych badań otrzymane zostaną nowe oszacowania koncentracyjne oraz znalezione i udowodnione zostaną nowe związki pomiędzy różnymi sposobami dowodzenia tychże oszacowań, co doprowadzi do lepszego zrozumienia ważnych modeli współczesnej matematyki teoretycznej i stosowanej.