Na co dzień zapisujemy i wykonujemy działania na liczbach używając dziesiętnego systemu pozycyjnego. Można jednak przedstawiać liczby naturalne w systemach pozycyjnych o dowolnej podstawie $b \geq 2$. W naszym projekcie skupimy się na badaniu pewnych interesujących własności takiego zapisu. Rozważane problemy leżą na przecięciu teorii liczb, kombinatoryki oraz informatyki teoretycznej. Projekt składa się z dwóch blisko powiązanych ze sobą części:

A Wystąpienia wartości specjalnych funkcji blokowo addytywnych w klasach reszt.

B Wariacje na temat hipotezy Cusicka.

Pierwszy temat nawiązuje do wyniku uzyskanego przez Gelfonda w 1968 roku. Rozważał on funkcję s_b zliczającą sumę cyfr w zapisie liczb naturalnych w zapisie pozycyjnym przy podstawie b. Udowodnił, że jeśli liczby $b-1, m$ są względnie pierwsze, to wartości funkcji s_b obliczone dla kolejnych wyrazów w dowolnym ciągu arytmetycznym $(kn+a)_{n\geq 0}$ dają z jednakową częstotliwością reszty $0, 1, \ldots, m-1$ przy dzieleniu przez m. Twierdzenie Gelfonda nie mówi jednak jak długo należy czekać na pojawienie się wybranej reszty. Problem ten został podjęty przez Morgenbessera, Shallita i Stolla, którzy uzyskali satysfakcjonujące rozwiązanie dla sytuacji $b = 2, a = 0, m = 2$, to znaczy parzystości sumy cyfr w binarnym przedstawieniu liczby kn. Taki dobór parametrów nie jest przypadkowy ponieważ wówczas rozważana wartość $s_2(kn) \bmod 2$ jest równa kn-temu wyrazowi słynnego ciągu Thuego–Morse'a. Morgenbesser, Shallit i Stoll uzyskali optymalne ograniczenie górne zależne jedynie od k na minimalną liczbę n, dla której wartość $s_2(kn)$ jest nieparzysta. Otrzymali także słabsze ograniczenie w ogólnym przypadku. Celem naszych badań będzie rozszerzenie tych wyników na inne specjalne funkcje *blokowo addytywne*, charakteryzujące zapis pozycyjny liczb naturalnych. Przede wszystkim, chcemy rozważyć analogiczny problem powstały przez zastąpienie sumy cyfr funkcją zliczającą wystąpienia ustalonego bloku kolejnych cyfr w zapisie pozycyjnym n. W szczególności, dla bloku cyfr binarnych 11 otrzymujemy inny dobrze znany ciąg, zwany ciągiem Rudina–Shapiro. Eksperymentalne obliczenia sugerują, że możemy spodziewać się rezultatów podobnego typu, jak te otrzymane przez Morgenbessera, Shallita i Stolla. Ponadto planujemy wzmocnić ich wynik dla sumy cyfr s_b w ogólnej sytuacji.

Druga część projektu poświęcona jest wariacjom na temat hipotezy postawionej przez Cusicka w 2012. Mówi ona, że dla dowolnej dodatniej liczby naturalnej t suma cyfr w zapisie binarnym liczby $n+t$ jest w ponad połowie przypadków (liczonych ze względu na n) większa lub równa sumie cyfr n. Choć istnieje prosty sposób na rozstrzygnięcie prawdziwości hipotezy dla dowolnej konkretnej wartości t, dotychczas nie udało się rozwiązać jej w pełnej ogólności. Znane są jedynie częściowe wyniki, uzyskane w pracach Drmoty, Kauersa, Spiegelhofera, Emme, Huberta, Stolla, Wallnera i innych. Głównym celem tej części naszego projektu będzie badanie problemów analogicznych do hipotezy Cusicka, gdzie zamiast sumy cyfr w zapisie binarnym występują inne interesujące funkcje (w tym blokowo addytywne). Między innymi, oryginalna hipoteza może być traktowana jako stwierdzenie dotyczące *różnicy skończonej* $s_2(n+t) - s_2(n)$. Planujemy zbadać jego naturalne uogólnienie na różnice skończone wyższych rzędów. W szczególności, wstępne obliczenia sugerują, że stwierdzenie odpowiadające hipotezie Cusicka dla różnicy drugiego rzędu $s_2(n+2t) - 2s_2(n+t) + s_2(n)$ powinno być prawdziwe dla wszystkich t. Oprócz tego, podobnie jak w pierwszym temacie, zamierzamy rozważyć problem powstały poprzez zastąpienie funkcji s_2 przez funkcje zliczające bloki. Jeszcze inną modyfikacją hipotezy Cusicka, którą jesteśmy zainteresowani, jest pytanie jak często spełnione są jednocześnie obie nierówności $s_2(n+t) \geq s_2(n)$ oraz $s_2(n+t) \geq s_2(n+2t)$, zadane przez Spiegelhofera i Stolla.