

Niniejszy projekt dotyczy matematycznej analizy pewnych wariacyjnych metod używanych do wykonywania zadań z zakresu przetwarzania obrazów, takich jak odszumianie, wzmacnianie czy dekompozycja. Ogólna idea badanych metod polega na zmniejszaniu w kontrolowany sposób pewnej wielkości E związanej z obrazem, takiej jak całkowite wahanie (ang. total variation, TV). Na przykład, w przypadku monochromatycznej grafiki rastrowej, (anizotropowe) całkowite wahanie można policzyć sumując wartość bezwzględną różnicy jasności między parami sąsiadujących pikseli. W uproszczeniu, można to traktować jako miarę szumu na obrazie. *Zmniejszanie w kontrolowany sposób* polega na wybraniu nowego obrazu, który minimalizuje E spośród wszystkich możliwych obrazów które w pewnym sensie nie są *zbyt* różne od wyjściowego obrazu. Alternatywną metodą jest tzw. potok najszybszego spadku E . Klasa wielkości E jakie rozważamy jest tak dobrana, by procedura ich zmniejszania usuwała ziarnisty szum, ale zachowywała ostre krawędzie.

W pierwszej części projektu badamy, jak zmieniają się pewne matematyczne własności obrazu po zastosowaniu procedury zmniejszania E . Na przykład, pytamy czy na obrazie mogą się pojawić nowe ostre krawędzie. Badamy również zachowanie tak zwanych pónorm Sobolewa, które można traktować jako pewne miary lokalnej wariancji obrazu.

Ważną innowacyjną cechą projektu jest rozważanie wielokanałowych obrazów/danych, takich jak obrazy RGB, w których każdemu pikselowi przyporządkowane są trzy liczby opisujące natężenie bazowych barw. W drugiej części projektu, rozważamy dane które ponadto spełniają nieliniowy więz, jak np. komponent koloru obrazu RGB, któremu można przyporządkować punkt ze sfery. Inne przykłady takich danych to orientacje obiektów takich jak kamery lub samoloty w przestrzeni (którym odpowiadają elementy tzw. grup Liego $SO(3)$ lub $SE(3)$), albo obrazy tensora dyfuzji (DTI, diffusion tensor images, w których przypadku każdemu pikselowi przyporządkowana jest symetryczna, dodatnio określona macierz 3×3). Badamy dobre postawienie potoku najszybszego spadku całkowitego wahanía takich danych. To znaczy, badamy istnienie i jednoznaczność rozwiązań układu równań różniczkowych opisującego taki potok. Ten rodzaj pytań jest fundamentalny dla zrozumienia jakościowego zachowania potoku, jak również dla zrozumienia własności schematów numerycznych używanych do obliczania potoku.