OSOBLIWOŚCI ROZWIĄZAŃ NIELINIOWYCH RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH CZĄSTKOWYCH POCHODZENIA GEOMETRYCZNEGO

MICHAŁ MIŚKIEWICZ

Opis popularnonaukowy

Punktem wyjścia moich badań są obiekty geometryczne nazywane *rozmaitościami* – krzywe, powierzchnie i obiekty wyższych wymiarów. Za przykłady interesujących (dla matematyka) 2-wymiarowych rozmaitości mogą służyć sfera, torus (powierzchnia dętki rowerowej) i wstęga Möbiusa. Jednym z podstawowych problemów w tej dziedzinie jest badanie rozmaitości o optymalnym (w jakimś sensie) kształtach.

Legenda o powstaniu Kartaginy sugeruje, że zagadnienia tego typu były badane już w starożytności. Według tej historii, założycielka tego miasta, Dydona, mogła na jego potrzeby zająć tyle ziemi, ile zdoła otoczyć paskiem ze skóry wołu. Zdecydowała się na kolisty kształt miasta, w ten sposób rozwiązując *problem izoperymetryczny* (znalezienia figury o zadanym obwodzie i maksymalnym polu).

Być może najbardziej znanym przykładem optymalizacji geometrycznej jest klasyczny problem Plateau. Mając zadaną zamkniętą krzywą K, rozważamy wszystkie powierzchnie D, dla których K jest brzegiem; wśród nich szukamy D o najmniejszym możliwym polu powierzchni. *Powierzchnie minimalne*, o których tu mowa, można zaobserwować na co dzień, choćby jako błony mydlane; w tym celu wystarczy zanurzyć w mydlinach kontur z drutu (pełniący rolę K).

Można by się spodziewać, że powierzchnie minimalizujące pole będą *gładkie* (ten dość techniczny termin znaczy w przybliżeniu tyle co *bez kantów*). I rzeczywiście, są one w większej części gładkie, ale jeśli krzywa K jest dostatecznie skomplikowana, różne części powierzchni mogą się przecinać wzdłuż *osobliwych* łuków i wierzchołków. Dokładniej, trzy płaty powierzchni mogą tworzyć kształt litery Y (jak strony w książce), a sześć płatów może się spotkać w kształt na planie czworościanu foremnego. Co ciekawe, są to jedyne możliwe konfiguracje; ilustracje błon mydlanych z takimi osobliwościami łatwo znaleźć w internecie.

Powyższy fenomen występowania punktów osobliwych, tworzących podzbiór niższego wymiaru, nazywa się *częściową regularnością*. Choć wydaje się paradoksalny, w optymalizacji geometrycznej jest on całkiem powszechny. Innym przykładem są *przekształcenia harmoniczne*, które stanowią główny temat mojego projektu; są to przekształcenia między dwiema ustalonymi rozmaitościami minimalizujące tak zwaną energię Dirichleta. Okazuje się, że mają one dużo cech wspólnych z powierzchniami minimalnymi. Moja praca skupia się na lepszym zrozumieniu ich osobliwości – jak dużo ich jest, jak wyglądają w małej skali i kiedy można być pewnym, że osobliwości nie ma wcale.

Do szukania i badania optymalnych obiektów często wykorzystuje się potoki geometryczne. Na przykład: aby znaleźć najkrótszą drogę na szczyt góry, najlepiej (choć nie zawsze najbezpieczniej) jest podążać cały czas w kierunku, w którym teren jest najbardziej stromy; nazywa się to *potokiem gradientowym*. Dla powierzchni minimalnych odpowiednikiem jest potok średniokrzywiznowy – wygina on zadaną powierzchnię, by w jak najkrótszym czasie zmniejszyć jej pole, a ostatecznie zdeformować do powierzchni minimalnej. Innym znanym przykładem jest potok Ricciego, dzięki któremu Grigorij Perelman udowodnił hipotezę Poincarégo.

W mojej pracy planuję badać jednorodny potok przekształceń harmonicznych; różni się on od klasycznego niejednorodnego potoku, badanego dotychchczas przez wielu autorów. Daje za to nową nadzieję na rozwiązanie pewnych wieloletnich problemów otwartych dotyczących przekształceń harmonicznych.