Geometria algebraiczna to dział matematyki stosujący metody geometryczne w zagadnieniach algebraicznych i metody algebraiczne w problemach geometrii. Najważniejszym obiektem badań w geometrii algebraicznej jest *rozmaitość algebraiczna*, czyli obiekt geometryczny opisany przy pomocy równań wielomianowych. Jednym z najbardziej spektakularnych zastosowań geometrii algebraicznej jest dowód *Wielkiego Twierdzenia Fermata* z 1637 roku mówiącego, że dla $n > 2$ równanie

$$a^n + b^n = c^n$$

nie posiada rozwiązań w liczbach całkowitych niezerowych a, b, c. G. Frey zauważył, kongruencja

$$y^2 \equiv x(x - a^n)(x + b^n) \pmod p$$

miałaby nieoczekiwaną liczbę rozwiązań, dla liczb a, b będących rozwiązaniem równia Fermata. Zbiór par liczb zespolonych spełniających równanie podobnej postaci

$$y^2 = x(x - a)(x - b)$$

nazywamy *krzywą eliptyczną*, po uzupełnieniu o "punkt w nieskończoności" jest ona torusem. Istnienie niezerowych rozwiązań równania Fermata powodowałoby, że skojarzona z nim krzywa eliptyczna nie spełniałaby hipotezy Taniyamy-Shimury-Weila. W 1993 roku A. Wiles dowiódł hipotezy Taniyamy-Shimury-Weila i w ten sposób również Wielkiego Twierdzenia Fermata.

Głównym obiektem badań prezentowanego projektu są wielowymiarowe odpowiedniki krzywych eliptycznych zwane *rozmaitościami Calabiego-Yau,* czyli rozmaitości rzutowe wymiaru $n > 1$ posiadające zespolony element objętości, ale nieposiadające niezerowych holomorficznym k-form różniczkowych, dla $0 < k < n$.

Zainteresowanie rozmaitościami Calabiego-Yau jest w znacznym stopniu motywowane zastosowaniami w fizyce teoretycznej, a w szczególności tzw. *teorii strun.* Modelem teorii strun jest 10-wymiarowa rozmaitość rzeczywista, którą następnie "kompaktyfikuje" się do iloczynu $M^4 \times X$ "zwykłej" czasoprzestrzeni Minkowskiego M^4 oraz rozmaitości X, która jest rozmaitością Calabiego-Yau.

Wiele spośród uzyskanych w teorii strun wyników miało głębokie konsekwencje matematyczne. Najsłynniejszą hipotezą matematyczną zainspirowaną fizyką jest *hipoteza symetrii lustrzanej*, zgodnie z którą trójwymiarowe rozmaitości Calabiego-Yau powinny występować w parach związanych zależnością

$$h^{1,1}(X) = h^{1,2}(Y) \quad \text{oraz} \quad h^{1,1}(Y) = h^{1,2}(X),$$

gdzie $h^{i,j}$ są jednymi z najważniejszych niezmienników liczbowych rozmaitości algebraicznych, zwanymi liczbami Hodge'a. Pomimo intensywnych badań w dalszym ciągu otwarte pozostaje wiele podstawowych problemów dotyczących rozmaitości Calabiego-Yau, w tym pytanie o ich klasyfikację.

Istnieje wiele metod konstrukcji rozmaitości Calabiego-Yau. Najwięcej przykładów dostarcza konstrukcja toryczna Batyreva i Borysova. W prezentowanym projekcie zamierzam badać rozmaitości typu Calabiego-Yau oraz ilorazy ich i ich produktów poprzez działanie grupy skończone. Rozmaitości ilorazowe tego typu wykazują wiele arytmetycznych własności. Jedną z najpoważniejszych trudności pojawiającej się przy badaniu ilorazów jest występowanie osobliwości odpowiadających punktom o nietrywialnym stabilizatorze.

Zgodnie z twierdzeniem Hironaki o desyngularyzacji, każda osobliwa rozmaitość zespolona posiada rozwiązanie osobliwości, czyli modyfikację bez punktów osobliwych. Rozwiązanie osobliwości w wyniku którego otrzymujemy rozmaitość Calabiego-Yau musi zachowywać dywizor kanoniczny, czyli być tzw. *rozwiązaniem krepantnym.* Istnienie krepantnego rozwiązania zostało dokładnie zbadane jedynie w przypadku rozmaitości wymiaru $\leqslant 3$. Do wyznaczania liczb Hodge'a konstruowanych rozmaitości zamierzam wykorzystać teorię *kohomologii orbifoldowych Chena-Ruana.*

Spodziewanym wynikiem prezentowanego projektu będzie uzyskanie nowych przykładów rozmaitości Calabiego-Yau, które są modularne, to znaczy spełniają odpowiednik hipotezy Taniyamy-Shimury-Weila w wymiarze $\geqslant 3$ oraz wykazują pewne własności z punktu widzenia teorii Hodge'a (jedną z ważnych hipotez C. Voisin).