Wrzucając kamień do jeziora w bezwietrzny dzień możemy zauważyć, że powstałe zmarszczki rozchodzą się, słabnąc, i po pewnym czasie tafla z powrotem staje się gładka. Przeciwną sytuację zaobserwujemy wrzucając kamień do wiaderka. Wówczas powstałe zaburzenia odbijają się od ścianek i nakładają na siebie w skomplikowany sposób przez dłuższy czas. Jest to jeden z przykładów na to, jak odmienna może być dynamika układów otwartych (powyższe jezioro) od ograniczonych (wiadro). W przypadku pierwszych z nich, zaburzenia mogą swobodnie się rozproszyć a układ wrócić do stanu początkowego, w drugich zaś brak jest takiej drogi ucieczki. Można się zatem domyślić, że opis zachowania się układów ograniczonych jest trudniejszy.

Konkretnym przykładem większej złożoności problemów ograniczonych przestrzennie jest kwestia stabilności czasoprzestrzeni anty–de Sittera (AdS) – jeden z najważniejszych nierozwiązanych problemów matematycznej Ogólnej Teorii Względności. Czasoprzestrzeń AdS należy, wraz z czasoprzestrzenią Minkowskiego oraz czasoprzestrzenią de Sittera, do ważnej klasy najprostszych rozwiązań równań Einsteina, lecz znacząco się różni od pozostałych przez posiadanie osiągalnego brzegu. Promień światła może do niego dolecieć w skończonym czasie, po czym się odbić i wrócić do nadawcy, co jest niemożliwe w przypadku dwóch pozostałych, gdzie taki promień będzie uciekał w nieskończoność. Pytanie o stabilność czasoprzestrzeni opiera się na rozważaniach, czy niewielkie zaburzenia ulegną rozproszeniu, czy też możliwe jest że się spotęgują i nałożą na przykład powodując powstanie czarnej dziury. Dla czasoprzestrzeni Minkowskiego i de Sittera wiemy, że ta druga sytuacja jest niemożliwa – istnieją ścisłe dowody ich stabilności. W przypadku AdS większość rezultatów stanowią jedynie numeryczne sugestie niestabilności.

Ponieważ ogólny problem wydaje się być bardzo trudny, korzystne może być wpierw rozpatrzenie jego prostszych przybliżeń. Takim przybliżeniem jest równanie Schrödingera z potencjałem harmonicznym (który działa tutaj niczym ściany opisywanego wcześniej wiadra) oraz członem opisującym niutonowskie przyciąganie, nazywamy je równaniem Schrödingera-Newtona-Hooke'a (SNH). Na takie równanie można się napotkać w opisie różnych układów kwantowych, jednakże wówczas rozważania ograniczają się do co najwyżej trzech wymiarów. Powyższy rezultat daje nam zaś motywację do przyjrzenia się równaniu SNH w wyższych wymiarach (problem stabilności czasoprzestrzeni AdS wymaga rozstrzygnięcia w dowolnej liczbie wymiarów, między innymi w związku z motywacjami płynącymi z bardzo popularnej korespondencji AdS/CFT).

Okazuje się, że w wyższych wymiarach własności rozwiązań równania SNH stają się zupełnie inne. Co więcej, nie jest to odosobniony przypadek, lecz szersza klasa równań Schrödingera z potencjałami pułapkującymi i pewnymi członami nielinowymi dzieli to zachowanie w tak zwanych wymiarach nadkrytycznych. Zjawiska o których tu mowa to między innymi zanik jednoznaczności rozwiązań (to znaczy pojawienie się wielu rozwiązań o tej samej energii) czy wzrost stabilności w wyższych wymiarach.

Niniejszy projekt ma na celu badania rozwiązań pewnych równań Schrödingera z potencjałem oraz nielinowością przy użyciu narzędzi numerycznych i analitycznych. W szczególności zamierzam znaleźć ścisłe odpowiedzi na kwestie istnienia, jednoznaczności i stabilności rozwiązań w dwóch prototypowych przypadkach (jednym z nich jest właśnie SNH). Postaram się też możliwie szeroko nakreślić klasę problemów zachowujących się w podobny sposób. Obecny brak wyników na tym polu można tłumaczyć nie tylko dotychczasowym brakiem motywacji fizycznej, lecz także brakiem odpowiednich matematycznych narzędzi. Podobnego rodzaju problemy zwykle rozwiązuje się korzystając z narzędzi analizy funkcjonalnej, które jednak przestają działać w wymiarach nadkrytycznych. W związku z tym przeprowadzane dowody będą korzystać z kombinacji metod pochodzących z teorii równań różniczkowych cząstkowych, równań różniczkowych zwyczajnych oraz układów dynamicznych. Na każdym etapie będę się wspierał odpowiednimi obliczeniami numerycznymi pozwalającymi sprawniej formułować hipotezy oraz nakreślać kierunki prowadzenia rozumowań.

Uzyskane wyniki nie tylko wypełnią pewne braki w zrozumieniu nieliniowych równań Schrödingera. Będą też pierwszym krokiem w pełnym zrozumieniu dynamiki równania SNH, a być może kolejnym kroczkiem ku wielkiemu celowi którym jest odpowiedź na pytanie o stabilność czasoprzestrzeni AdS.