Teoria skokowych procesów Lévy'ego i typu Lévy'ego o wartościach w $\mathbb{R}^d$ (i odpowiadających im operatorów nielokalnych) jest intensywnie badana od późnych lat 90-tych zarówno przez probabilistów, jak i specjalistów od równań różniczkowych cząstkowych. Teoria ta ma zastosowania w świecie rzeczywistym w mechanice kwantowej, badaniu rozchodzenia się fal wodnych, meteorologii, krystalografii, biologii, finansach i zaawansowanych technologiach, oraz innych działach nauki teoretycznej i stosowanej.

W opisie procesów skokowych typu Lévy'ego (i odpowiedających im operatorów) podstawowym obiektem jest miara skoku $\nu(x, dy)$. Opisuje ona intensywność skoków procesu od punktu $x \in \mathbb{R}^d$ do punktu $y \in \mathbb{R}^d$. Aktualnie dwa przypadki są dość dobrze zbadane. Pierwszy to sytuacja gdy intensywność $\nu(x, dy)$ nie zależy od x (to znaczy kiedy $\nu(x, dy) = \nu(dy)$), czyli w przypadku procesów Lévy'ego (i odpowiednich operatorów Lévy'ego). Drugi dość dobrze rozpoznany przypadek ma miejsce kiedy miara $\nu(x, dy)$ jest absolutnie ciągła względem miary Lebesgue'a (to jest $\nu(x, dy) = q(x, y)dy$) i jej gęstość spełnia pewne warunki regularności, na przykład jest porównywalna do gęstości izotropowej (czyli $q(x, y) \approx q_0(|x - y|)$, typowo $q(x, y) \approx |x - y|^{-d-\alpha}$, $\alpha \in (0, 2)$).

Celem naszego projektu jest zbadanie przypadku, gdy $\nu(x, dy)$ zależy od x i jest miarą singularną, czyli nie jest absolutnie ciągła względem miary Lebesgue'a. Bardziej dokładnie, zamierzamy zbadać anizotropowe operatory typu Lévy'ego $\mathcal{L}_{A,b}$ (zdefiniowane poniżej), które mogą być traktowane jako anizotropowe, nielokalne odpowiedniki eliptycznych operatorów różniczkowych drugiego rzędu.

Rozważmy następujący operator Lévy'ego w R^d: $\mathcal{L}f(x) = \lim_{\zeta \to 0^+} \int_{|z|>\zeta} [f(x + z) - f(x)] \, \nu(dz)$, gdzie $d \geq 2$, $f \in C_b^2(\mathbb{R}^d)$, $x \in \mathbb{R}^d$, a ν jest miarą Lévy'ego na $\mathbb{R}^d$. Interesuje nas głównie przypadek, gdy miara Lévy'ego jest anizotropowa i singularna, to znaczy, gdy nie jest absolutnie ciągła względem miary Lebesgue'a na $\mathbb{R}^d$. Typowym przykładem interesującego nas operatora jest $\mathcal{L}^{(s)} = -\left(-\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\right)^{\alpha_1/2} - \ldots - \left(-\frac{\partial^2}{\partial x_d^2}\right)^{\alpha_d/2}$, gdzie $\alpha_i \in (0, 2)$, $i = 1, \ldots, d$.

Planujemy zbadać anizotropowe operatory typu Lévy'ego, oparte na $\mathcal{L}$, które mają następującą postać

$$\mathcal{L}_{A,b}f(x) = \lim_{\zeta \to 0^+} \int_{|z|>\zeta} \left[f(x + zA^T(x)) - f(x)\right] \, \nu(dz) + b(x)\nabla f(x),$$

gdzie $d \geq 2$, $f \in C_b^2(\mathbb{R}^d)$, $x \in \mathbb{R}^d$, ν jest jak wyżej, $A(x) = (a_{ij}(x))$ są odwracalnymi macierzami wymiaru $d \times d$, $b(x) = (b_1(x), \ldots, b_d(x))$, oraz $a_{ij}(x)$, $b_i(x)$ są ograniczonymi i ciągłymi funkcjami na $\mathbb{R}^d$ o wartościach w $\mathbb{R}$.

Planujemy zbadać własności półgrup dla tych anizotropowych operatorów typu Lévy'ego. Ze względu na anizotropowość miary Lévy'go ν i efekty spowodowane przez macierze $A(\cdot)$ operatory $\mathcal{L}_{A,b}$ mają pewne nieoczekiwane własności. Z naszych wstępnych prac nad tymi operatorami okazało się, że dla niektórych wyborów miar Lévy'ego ν, macierzy $A(\cdot)$ i $b(\cdot)$, jądro ciepła $p(t, x, y)$ dla $\mathcal{L}_{A,b}$ jest nieograniczone dla niektórych $t > 0$, tzn. $\sup_{x,y \in \mathbb{R}^d} p(t, x, y) = \infty$ dla pewnych $t > 0$. Z tego powodu badanie takich operatorów typu Lévy'ego jest trudne, a istniejące metody nie są wystarczające.

Planujemy zbadać teorię spektralną dla operatorów Schrödingera opartych na anizotropowych operatorach typu Lévy'ego, które mają postać $\mathcal{L}_{A,b} + q$. Szczególnie interesujący jest następujący anizotropowy operator Lévy'ego

$$\mathcal{L}^{(e)}f(x) = \sum_{i=1}^{N} \sqrt{-\frac{\partial^2}{\partial x_{3i-2}^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_{3i-1}^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_{3i}^2} + m^2} - Nm,$$

gdzie $m > 0$, $N \in \mathbb{N}$. W książce Lieba i Seiringera "The Stability of Matter in Quantum Mechanics" jest on operatorem energii kinetycznej w relatywistycznym hamiltonianie dla N elektronów. Jednym z celów naszego projektu badawczego jest zbadanie teorii spektralnej dla $\mathcal{L}_{A,b}^{(e)} + q$.

Planujemy również zbadać zagadnienia brzegowe dla operatorów $\mathcal{L}_{A,b}$. W szczególności chcemy zbadać funkcje Greena, jądra Poissona i regularność rozwiązań dla zagadnienia brzegowego z warunkiem Dirichleta dla tych operatorów na ograniczonych zbiorach otwartych.

Wierzymy, że nasze badania doprowadzą do lepszego zrozumienia anizotropowych, nielokalnych operatorów. Ostatecznym celem jest zbudowanie nielokalnego odpowiednika teorii dla eliptycznych operatorów różniczkowych drugiego rzędu.