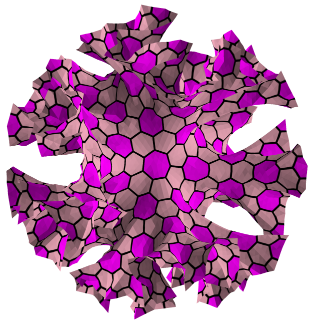

Geometrie nieeuklidesowe zostały odkryte przez matematyków zastanawiających się nad naturą równoległości. Euklides pokazał, że cała znana geometria wynika z pięciu prostych aksjomatów. Nie był jednak do końca zadowolony ze swojego piątego aksjomatu – aksjomat ten zastrzegał, że linie, które się nie przecinają pozostają w stałej odległości od siebie. Aksjomat ten był dużo bardziej skomplikowany niż pozostałe, i wydawało mu się, że powinien on wynikać z pozostałych aksjomatów. Dopiero w XIX wieku odkryto geometrię hiperboliczną, w których ten aksjomat nie zachodzi – w geometrii hiperbolicznej linie, które się nie przecinają, „rozchodzą się". Geometria hiperboliczna może być rozumiana jako geometria powierzchni o stałej ujemnej krzywiźnie (takiej jak na rysunku). Częściej spotykaną geometrią nieeuklidesową jest geometria powierzchi o stałej dodatniej krzywiźnie (sfery); problemy spowodowane przez to, że powierzchnia Ziemi nie jest płaska (a zatem nieeuklidesowa) są ewidentne w kartografii i nawigacji. W większej liczbie wymiarów jest więcej możliwych geometrii.Mimo że oryginalnie badanie geometrii nieeuklidesowych było bardzo abstrakcyjne i nawet uważane za szaleństwo (przecież piąty aksjomat oczywiście zachodzi w naszym świecie, po co się tym zajmować), prace te doprowadziły w dalszej kolejności do rozwoju geometrii różniczkowej, obecnie szeroko stosowanej w wielu dziedzinach, od fizyki (ogólna teoria względności) do analizy danych i inżynierii.

W naszym projekcie zamierzamy zająć się między innymi następującymi zagadnieniami:

Wizualizacje geometrii Thurstona. Jednym z najsłynniejszych wyników w matematyce ostatnich lat jest dowód hipotezy geometryzacyjnej Thurstona. Hipoteza ta mówi, że każda przestrzeń trójwymiarowa może zostać podzielona na części, z których każda ma geometrię Euklidesową, sferyczną, hiperboliczną, lub jedną z pięciu innych konkretnych geometrii. Konsekwencją hipotezy geometryzacyjnej jest hipoteza Poincaré, za której dowód była wyznaczona nagroda miliona USD; autor dowodu, G. Perelman, nagrody tej nie przyjął. Jednym z celów naszego projektu jest atrakcyjna wizualizacja: użytkownik będzie mógł wejść do wirtualnego świata opartego na jednej z tych geometrii. Taka wizualizacja będzie pomocna matematykom specjalizującym się w topologii niskowymiarowej, fizykom, artystom matematycznym, twórcom gier komputerowych, a także w analizie danych.

Badanie algorytmicznych aspektów grafów hiperbolicznych. Geometria hiperboliczna ma bliskie związki z silnymi w Polsce dziedzinami informatyki teoretycznej, takimi jako teoria złożoności sparametryzowanej czy teoria automatów na drzewach nieskończonych. Wiadomo, że bardzo dobre własności algorytmiczne mają grafy podobne do drzew; zazwyczaj to podobieństwo do drzew jest mierzone parametrem zwanym szerokością drzewiastą grafu. Grafy hiperboliczne są również podobne do drzew, ale to podobieństwo mierzy się inaczej. Chcemy scharakteryzować problemy algorytmiczne, które dają się efektywnie rozwiązać na takich grafach.

Zanurzanie danych w przestrzenie nieeuklidesowe. Przestrzeń hiperboliczna ma strukturę podobną do wykładniczo rozrastającego się drzewa. Jeśli spróbujemy na kartce papieru narysować pełne drzewo binarne wysokości 10 – wierzchołek z dwoma odgałęzieniami, z których każde ma dwa odgałęzienia (tej samej długości), i tak dalej 10 razy – to prawdopodobnie nam się to nie uda, albo odgałęzienia na dziesiątym poziomie będą musiały być bardzo blisko siebie. Na płaszczyźnie hiperbolicznej tego problemu nie ma – ze względu na to, że linie równoległe „rozchodzą się", pojawia się między nimi nowa przestrzeń, w której wszystko bardzo dobrze się zmieści. Własność ta znalazła ostatnio zastosowanie w wizualizacji i analizie danych – jeśli chcemy dane o drzewiastej strukturze zwizualizować albo modelować. Przykładowo, taką hierarchiczną strukturę mają sieci społeczne typu Facebook czy Twitter – posty osób bardzo popularnych są czytane na całych świecie, podczas gdy posty osób mniej popularnych są czytane przez lokalnych znajomych, lub osoby o podobnych zainteresowaniach. W naszym projekcie zamierzamy zbadać zanurzenia w inne przestrzenie nieeuklidesowe, oraz zbadać możliwość użycia takich zanurzeń do wykrywania ważnych wierzchołków w sieciach społecznych.