

Projekt jest podzielony na trzy części. W pierwszej rozważamy tak zwane twierdzenia graniczne dla procesów losowych. Żeby to zilustrować, rozważmy następującą grę. Ustalmy ulubioną walutę, np. dolary, i rzucajmy monetą. Jeśli wypadnie orzeł, wygrywamy jednego dolara, natomiast jeśli wypadnie reszka, przegrywamy. Oznaczmy przez S_n stan naszego konta po n rzutach. Intuicyjnie przeczuwamy, że po dużej liczbie rzutów nasz średni zysk na jeden rzut będzie bliski zeru, tj. $\frac{S_n}{n} \sim 0$. Nazywa się to mocnym prawem wielkich liczb. Jednakże, chcielibyśmy wiedzieć więcej: jakie jest prawdopodobieństwo, że nasz całkowity zysk S_n leży w pewnym przedziale $[-m, m]$ dla pewnej liczby $m > 0$? To prawdopodobieństwo może być przybliżone za pomocą tak zwanego rozkładu normalnego. Nazywa się to centralnym twierdzeniem granicznym. W końcu, jaki jest maksymalny i minimalny osiągnięty zysk, kiedy liczba rzutów wzrasta? Rzecz jasna, powinien on zależeć od liczby rzutów n oraz nie będzie równy po prostu n , ponieważ nie jest rozsądne oczekiwać, że nie wypadnie ani jedna reszka. Można wykazać, że $-C\sigma\sqrt{2n \log \log n} \leq S_n \leq C\sigma\sqrt{2n \log \log n}$ prawie na pewno dla pewnego $\sigma > 0$, każdej liczby $C > 1$ i dla dostatecznie dużych n . To oszacowanie jest optymalne. To ostatnie twierdzenie nazywane jest prawem iterowanego logarytmu, z uwagi na postać tego dziwnego ciągu, zawierającego iterowany logarytm $\log \log n$.

W projekcie chcemy badać gry związane ze spacerami losowymi na odcinku. Weźmy dowolną funkcję φ na odcinku, taką że przy losowaniu punktu z przedziału oczekiwana wartość funkcji φ w tym punkcie wynosi zero. Rozważmy pewną regułę poruszania się po przedziale. Na przykład, wybierzmy pewien punkt $x \in (0, 1)$. Jeśli ten punkt leży na lewo od liczby $3/4$, przesuńmy się do punktu, który jest trzy czwarte bliżej zera niż wyjściowy punkt x . Jeśli ten punkt leży po prawej od liczby $3/4$, to przesuńmy się do punktu, który jest dwukrotnie dalej od jedynki niż punkt x . Ustalmy także drugą regułę, która będzie symetryczna względem pierwszej (w projekcie rozważamy znacznie bardziej skomplikowane reguły). Teraz ponownie rzucajmy monetą i poruszajmy się według pierwszej reguły, jeśli wypadnie reszka, i według drugiej reguły, jeśli wypadnie orzeł. Taki proces nazywany jest spacerem losowym. Jako rezultat otrzymujemy pewien losowy ciąg (x_1, x_2, \dots) punktów przedziału, które odwiedziliśmy. Nasz zysk dany jest przez liczby $S_n = \varphi(x_1) + \varphi(x_2) + \dots + \varphi(x_n)$. Pytanie, czy twierdzenia graniczne zachodzą dla tego spaceru losowego?

Druga część projektu jest także poświęcona spacerom losowym, tym razem na okręgu. Ustalmy pewną liczbą $\alpha \in [0, 2\pi)$, niewspółmierną z π , i przyporządkujmy każdemu punktowi okręgu pewną niesymetryczną monetę, tj. taką w której prawdopodobieństwo wypadnięcia orła nie jest równe wypadnięciu reszki. To przyporządkowanie nie może być zupełnie dowolne. Prawdopodobieństwo wypadnięcia orła powinno zmieniać się w sposób regularny w zależności od punktu (przynajmniej ciągły). Rozważmy spacer losowy, w którym będąc w punkcie x na okręgu, bierzemy monetę przyporządkowaną temu punktowi i przejdźmy do punktu oddalonego o α w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, jeśli wypadł orzeł, i w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara, jeśli wypadła reszka. Ustalmy pewien łuk na okręgu. Można zapytać, jakie jest prawdopodobieństwo, że po n krokach znajdziemy się akurat w tym łuku. Pytanie brzmi, czy to prawdopodobieństwo stabilizuje się, gdy liczba kroków się zwiększa.

Trzecia część jest poświęcona teorii ergodycznej. Żeby ją zilustrować, wyobraźmy sobie szczelnie zamknięte pudełko z gazem, który jest w jakiś sposób mieszany. Gaz składa się z wielu małych cząsteczek poruszających się po pudełku. Możemy zatem ustalić pewną cząstkę i śledzić jej trajektorię. Jakie jest jej statystyczne zachowanie? Jak dużo czasu spędza w ustalonym obszarze przestrzeni? W jaki sposób ten czas zależy od obszaru? Teoria ergodyczna rozważa tego typu pytania. W projekcie rozważamy przykłady systemów, w których przestrzenią fazową jest okrąg. Warto zauważyć, że okrąg jest jednowymiarowym torusem, które to są przestrzenią fazową dla wielu zagadnień z mechaniki nieba.