

PROJEKT BADAWCZY

METODY TOPOLOGICZNE ANALIZY GEOMETRYCZNEJ

POPULARNO-NAUKOWE STRESZCZENIE PROJEKTU

PAWEŁ GOLDSTEIN

Na początek wypadałoby wyjaśnić, czym jest analiza geometryczna. Zacząć łatwo: jest to dziedzina matematyki, ale dalej jest trudniej, bo analiza geometryczna nie ma jasno zarysowanych granic. Zaliczamy do niej zarówno zastosowania metod geometrii (w tym geometrii różniczkowej i topologii) do zagadnień pochodzących z różnych działów analizy (przede wszystkim równań różniczkowych i rachunku wariacyjnego), jak i odwrotnie: metody mające źródło w równaniach różniczkowych czy innych działach analizy, użyte do zagadnień geometrycznych.

W tak szeroko rozumianym sensie cała geometria różniczkowa, badająca krzywe, powierzchnie i ich wyżej wymiarowe odpowiedniki – rozmaitości, jest działem analizy geometrycznej. Klasyczna geometria różniczkowa bada rozmaitości gładkie, a więc takie, do opisu których używamy funkcji różniczkowalnych, i to najczęściej nieskończenie wiele razy.

Niestety (a może na szczęście) do opisu i badania rzeczywistości takie funkcje nie wystarczają. Aby zbadać możliwe kształty błony mydlanej rozpiętej na pociętej pętli z drutu albo przewidzieć, gdzie pojawią się pęknięcia w ściskanim materiale potrzebujemy funkcji, które często wcale nie są różniczkowalne – bywa, że nie mają pochodnej w żadnym punkcie.

Aby móc takie funkcje i przekształcenia mimo to badać metodami analizy matematycznej, wprowadzono pojęcie słabej pochodnej. Nie sposób tu podać jej definicji, ważne, że dla funkcji różniczkowalnych słaba pochodna jest po prostu pochodną, i że z punktu widzenia równań różniczkowych cząstkowych i rachunku wariacyjnego słaba pochodna ma bardzo wiele własności zwykłej pochodnej. Wiele, ale nie wszystkie.

Nas szczególnie interesują własności topologiczne przekształceń, a więc z grubsza te, które są niewrażliwe na lekkie deformacje przekształceń: czy przekształcenie odwraca lewą i prawą stronę (jak symetria na płaszczyźnie), czy nie? Gdy owijamy ołówek gumką recepturką (co można opisać jako przekształcenia okręgu w siebie), to ile razy okręca się ona wokół niego? Czy przekształcenie skleja dwa dalekie punkty lub rozrywa dwa bardzo bliskie? Dla przekształceń różniczkowalnych dobrze wiemy, jak badać te własności przy pomocy pochodnej. A jeżeli przekształcenie ma tylko słabą pochodną? Czy możemy przy jej pomocy odpowiadać na tego typu pytania?

Na mój projekt składa się wiele szczegółowych pytań, których wspólnym mianownikiem jest ten właśnie kłopot: badamy w nich przekształcenia: między sferami, między przestrzeniami czy też kostkami różnych wymiarów i zadajemy takie pytania o „zgrubne”, topologiczne własności, na które łatwo potrafilibyśmy odpowiedzieć, gdyby chodziło o przekształcenia dostatecznie wiele razy (albo choć jeden raz) różniczkowalne. My jednak chcemy znać odpowiedź dla przekształceń, które są za mało gładkie, by można było użyć klasycznych metod.

Odpowiedzi na te pytania są ważne między innymi dla teorii odkształceń elastycznych i innych matematycznych modeli materiałów.

Spodziewam się, że materialnym rezultatem projektu będzie około dziesięciu artykułów badawczych w wiodących czasopismach matematycznych; wyniki badań zamierzamy ogłosić środowisku matematycznemu na międzynarodowych konferencjach.