Geometria lipschitzowska przestrzeni metrycznych oraz stowarzyszone z nią teoria operatorów i analiza harmoniczna – streszczenie, Tomasz Kania, Uniwersytet Jagielloński.

Odległość między dwoma punktami jest liczbą nieujemną, która nie zależy od tego czy mierzymy ją od punktu początkowego do końcowego czy końcowego a początkowego, każdy punkt leży w zerowej odległości od siebie samego oraz odległość z jednego punktu do drugiego może tylko wzrosnąć jeżeli po drodze pójdziemy przez dowolny inny punkt. W matematyce zbiory z określonym pojęciem odległości spełniającym powyższe warunki nazywamy *przestrzeniami metrycznymi*. Przestrzenie metryczne są wszędobylskie w matematyce, ponieważ pozwalają unifikować metody z różnych dziedzinach matematyki w naturalny sposób. Możemy mówić o przestrzeniach metrycznych funkcji, zbiorów, czy nawet bardziej ogólnych struktur. Odległości inne niż euklidesowa, tj. ta, którą posługujemy się w życiu codziennym do wyznaczania odległości między punktami, używane są także w statystyce czy analizie danych.

Zdefiniowane, jak wyżej, pojęcie przestrzeni metrycznej nie pozwala na dodawanie bądź skalowanie wektorów, tak jak możemy to robić na płaszczyźnie czy przestrzeni trójwymiarowej. W matematyce, *przestrzenie unormowane* to klasa przestrzeni metrycznych, w których te operacje możemy wykonywać. Struktury te są na tyle bogate, że możemy uprawiać w nich klasyczną analizę matematyczną, tj. np. mówić o różniczkowalności funkcji bądź ich całkowalności.

Celem niniejszego projektu jest badanie pewnych naturalnych zanurzeń zachowujących odległość ogólnych przestrzeni metrycznych (tj. przestrzeni bez dodatkowej struktury dodawania/skalowania) w przestrzenie unormowane. Proces ten nazywany jest budową *wolnej przestrzeni Banacha nad przestrzenią metryczną* i jest on przedmiotem zaawansowanych badań szybko rozwijającej się gałęzi nowoczesnej analizy matematycznej.

Jednym z zadań, które przed sobą stawiamy jest używanie ciągłych przekształceń liniowych, tj. takich przekształceń przestrzeni unormowanych, które w sposób ciągły potrafią zachowywać operacje dodawania i skalowania (są operatorami liniowymi) do badania struktury wolnych przestrzeni po to by móc wydobywać informacje o samych przestrzeniach metrycznych. O ile proces przyporządkowywania wolnej przestrzeni Banacha do przestrzeni metrycznej możemy interpretować jako przechodzenie o poziom wyżej, tak w niniejszym projekcie proponujemy pójść o jeszcze jeden krok dalej.

Filozofia używania operatorów liniowych otwiera potencjalnie furtkę rozwoju innej gałęzi matematyki, mianowicie analizy harmonicznej (wywodzącej się np. z teorii przetwarzania sygnałów) dla tych przestrzeni metrycznych, które mają zadaną dodatkową strukturę algebraiczną półgrupy, tj. wyposażone są w pewne działanie łączne. Analiza harmoniczna jest doskonale rozwinięta dla tzw. grup lokalnie zwartych, ale poza tą klasą obiektów algebraiczno-metrycznych niewiele wiadomo.

Ponadto, chcemy używać tak wypracowanego aparatu do badania tzw. geometrii dużej skali przestrzeni metrycznych. W dużym uproszczeniu zbiór liczb całkowitych oraz zbiór liczb rzeczywistych wyglądają dość podobnie gdy patrzy się na nie z oddali, tj. liczby zlepiają się w linię. W tym przypadku powiemy, że oba te zbiory (tak przecież różne) są równoważne w sensie geometrii dużej skali. Jednym ze sposobów badania geometrii dużej skali jest użycie pewnych algebr operatorów ograniczonych na przestrzeni funkcji sumowalnych z kwadratem na danej przestrzeni metrycznej. W naszym projekcie chcielibyśmy pogodzić ów podejście algebraiczne z użyciem operatorów na wolnych przestrzeniach Banacha.

Efektem realizacji projektu będzie potencjalny rozwój ważkich dziedzin matematyki (takich jak analiza harmoniczna czy teoria operatorów) w kontekście istotnych klas naturalnie pojawiających się obiektów matematycznych dla których nie są one obecnie dostępne. Ponadto, innym efektem będzie zaszczepienie na gruncie polskiej matematyki kierunku badań, który zyskuje na istotności w głównym nurcie współczesnej Analizy.