

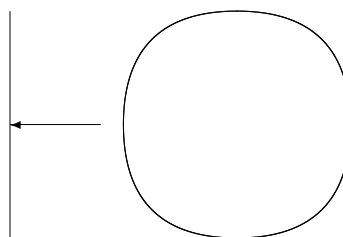
NAKRYCIA KLEINA KRZYWYCH ZESPOLONYCH

PAWEŁ BORÓWKA

Geometria. Podstawowymi obiektami naszych badań są gładkie krzywe (bez przecięć i ostrzy). Wyobraźmy sobie odcinek i tak samo duży okrąg po jego prawej stronie (jak na rysunku).

Odwzorowanie z okręgu na odcinek ma ciekawą własność. Każdy punkt na odcinku (poza końcami) jest obrazem dwóch punktów na okręgu. Takie odwzorowanie jest przykładem podwójnego nakrycia odcinka rozgałęzionego w dwóch punktach – końcach odcinka.

Czy jesteśmy w stanie narysować podwójne nakrycie okręgu?



Przedstawiony projekt rozważa krzywe zespolone (liczby zespolone to takie w których $\sqrt{-1}$ ma sens). Na krzywe zespolone można patrzeć jak na specjalne powierzchnie rzeczywiste nazwane powierzchniami Riemanna. Jeśli zamiast odcinka, rozważymy sferę (zwaną sferą Riemanna), to każdą powierzchnię będącą jej podwójnym nakryciem (co najmniej 6 punktów rozgałęzienia) nazwiemy krzywą hiperliptyczną. W projekcie chcemy badać nakrycia Kleina krzywych hiperliptycznych. Nakrycie Kleina to nierozgałęzione nakrycie stopnia 4 z grupą monodromii izomorficzną z grupą czwórkową Kleina.

Bardziej precyzyjne sformułowania. Nakrycia krzywych pozwalają porównać własności krzywych nakrywanych i nakrywających. W teorii krzywych, bardzo wiele wiemy na temat podwójnych nakryć. Tematem projektu są nakrycia Kleina, które są naturalnym uogólnieniem podwójnych nakryć. Zauważmy, że $4 = 2 \cdot 2$, więc nakrycie Kleina może być traktowane jako złożenie dwóch podwójnych nakryć. Z tego powodu, nasze badania są nowe, a jednocześnie bardzo naturalne.

W publikacjach z Angelą Ortęgą z Uniwersytetu Humboldta w Berlinie pt. *Hyperelliptic curves on $(1, 4)$ polarised abelian surfaces* oraz *Klein coverings of genus 2 curves* otrzymaliśmy kilka rezultatów dotyczących nakryć Kleina krzywych genusu 2, w szczególności udowodniliśmy różnowartościowość odwzorowania Prym. W opisywanym projekcie chcielibyśmy uogólnić wyniki w następujący matematycznie bardziej precyzyjny sposób.

- Uogólnienie konstrukcji na krzywe hiperliptyczne wyższych genusów (docelowo bez założenia hiperliptyczności).
- Rozważenie krzywych hiperliptycznych z involucjami mającymi punkty stałe
- Konstrukcja przykładów: chcielibyśmy podać wzory krzywych nakrywających i ich Jacobianów dla genusu 2.
- Uzwarczenie konstrukcji: nakrycia krzywych osobliwych genusu 2 oraz rozszerzone odwzorowanie Prym.
- Uogólnienie konstrukcji na przykłady nakryć o grupie monodromii $Z_3 \times Z_3$