

Celem projektu jest skonstruowanie teorii kombinatorycznych układów dynamicznych razem z algorytmami i oprogramowaniem dla analizy próbkowanych układów dynamicznych. Aby wyjaśnić naszą motywację musimy przypomnieć czym jest teoria układów dynamicznych i jakie są jej braki w odniesieniu do aktualnych potrzeb nauki i technologii.

Odkrycie rachunku różniczkowego i całkowego przez Leibniza i Newtona w drugiej połowie XVII wieku umożliwiło formułowanie problemów w nauce w postaci równań różniczkowych. Chociaż niewiele takich równań można rozwiązać analitycznie, metody numeryczne opracowane w XVIII i XIX wieku pozwoliły naukowcom konstruować wystarczająco dobre przybliżone rozwiązania. Skonstruowanie cyfrowych komputerów w drugiej połowie XX wieku znacznie zwiększyło zakres zastosowań równań różniczkowych rozwiązywalnych numerycznie. Niestety metody numeryczne mogą zapewnić rozwiązania tylko w skończonych przedziałach czasowych. W rezultacie przybliżenia często nie wystarczają do przewidzenia asymptotycznego zachowania rozwiązań to jest zachowania gdy czas zmierza do nieskończoności. Problem ten ujawnił się pod koniec XIX wieku, kiedy naukowcy próbowali udowodnić stabilność naszego układu Słonecznego. Problem stabilności należy do szerszej klasy problemów polegających na klasyfikacji zbiorów niezmienniczych oraz w szczególności atraktorów bez znajomości dokładnych czy choćby przybliżonych wzorów na rozwiązania. W takich problemach nieznanymi rozwiązaniami stają się przedmiotem badań teorii układów dynamicznych. Pod koniec XIX wieku francuski naukowiec Henri Poincaré zaproponował topologię jako nowe narzędzie do badania problemów w teorii układów dynamicznych. W drugiej połowie XX wieku zaproponowano kilka narzędzi topologicznych do badania i klasyfikacji asymptotycznej dynamiki, w szczególności oparty na zasadzie Ważewskiego indeks Conleya. Początek XXI wieku przyniósł nowe wyzwania. Nowoczesna technologia ułatwia pozyskiwanie terabajtów danych z eksperymentów, obserwacji lub symulacji. Problem znany jako Big Data polega na tym, jak uzyskać przydatne informacje z wielkiej ilości danych. W kategoriach geometrycznych takie dane tworzą chmurę punktów w przestrzeni o wysokim wymiarze. Chmura ta przybliża zamkniętą hiperpowierzchnię w przestrzeni, a topologia tej hiperpowierzchni podpowiada istotne informacje ukryte w danych. Rekonstrukcja hiperpowierzchni z danych w postaci przybliżającego ją wielościanu jest przedmiotem intensywnych badań w ostatnich latach. Dla wielu dynamicznych problemów w nauce, szczególnie w biologii, medycynie i naukach społecznych żaden model matematyczny nie jest znany, a nawet jeśli model jest znany, nadal ma wiele nieznanymi i niemierzalnych składników. Jednak w większości tych problemów nadal możemy gromadzić duże ilości danych z eksperymentów lub obserwacji. W efekcie zamiast równania różniczkowego dostajemy chmurę wektorów, która jest chmurą punktów z wektorem zaczepionym w każdym punkcie. Można spróbować znaleźć równanie różniczkowe, które jest dość dobrze zgodne z chmurą wektorów, ale takie równanie jest sztuczne i staje się ponownie dyskretnie gdy jest badane metodami numerycznymi. Dlatego naturalne jest pytanie, czy kombinatoryczny odpowiednik klasycznego układu dynamicznego może być zbudowany na wielościanie zbliżonym do chmury i czy taki kombinatoryczny odpowiednik układu dynamicznego może być badany za pomocą analogicznych narzędzi topologicznych, jak w przypadku klasycznej dynamiki topologicznej. Częściowa odpowiedź na to pytanie znajduje się w artykułach z końca XX wieku i początku XXI wieku autorstwa amerykańskiego matematyka Robina Formana. Zbudował on kombinatoryczny odpowiednik teorii Morse'a, podstawowej teorii topologii różniczkowej skonstruowanej w pierwszej połowie XX wieku przez innego amerykańskiego matematyka Marstona Morse'a. Teorię indeksu Conleya można uznać za rozszerzenie teorii Morse'a na potrzeby asymptotycznego badania układów dynamicznych.

Przyjmując jako punkt wyjścia kombinatoryczną teorię Morse'a autorstwa Formana, opracujemy ogólną teorię kombinatorycznych układów dynamicznych wraz ze stosownym kombinatorycznym odpowiednikiem teorii indeksu Conleya, wykorzystującą topologię Alexandrova na skończonych przestrzeniach topologicznych. Zaprojektujemy algorytmy, które pozwolą nam budować kombinatoryczne układy dynamiczne z danych. Zaimplementujemy te algorytmy wraz z algorytmami przeprowadzającymi globalną analizę kombinatorycznych układów dynamicznych za pomocą niezmienników topologicznych. Przetestujemy algorytmy na symulacjach wybranych problemów praktycznych. W ramach projektu będziemy ściśle współpracować z najlepszymi europejskimi i amerykańskimi naukowcami pracującymi nad pokrewnymi problemami.

Rezultatem projektu będzie całkowicie nowa technika budowania modeli matematycznych z danych dynamicznych. Technika ta udostępni zupełnie nowe metody analizy, klasyfikacji i prognozowania próbkowanych układów dynamicznych. Nowej teorii towarzyszyć będzie biblioteka oprogramowania z otwartą licencją do konstruowania modeli z danych i ich analizy. Wyniki zostaną opublikowane w czołowych międzynarodowych czasopismach i zaprezentowane na międzynarodowych konferencjach.