Badanie struktury wiązarów i ich zastosowań w teorii pierścieni i klamerek

Już we wczesnym dzieciństwie nauczyliśmy się, że są przynajmniej dwa sposoby na wykonanie rachunków, które łączą dodawanie i mnożenie. Aby dodać 3×5 do 3×7 możemy albo najpierw zmnożyć liczby a potem dodać do siebie wyniki mnożenia: $15 + 21 = 36$, albo też możemy wyłączyć wspólny czynnik 3, dodać 5 do 7, a potem wynik pomnożyć przez 3, i uzyskać w ten sposób $3 \times 12 = 36$. Obie metody dają tę samą odpowiedź, i zawsze tak jest, niezależnie od tego, jakie konkretnie liczby wybierzemy. Matematyczna zasada, która kieruje tym zachowaniem się liczb nosi nazwę *prawa rozdzielności*. Uczono nas w szkole, że mnożenie jest rozdzielne względem dodawania. Mówiąc bardziej abstrakcyjnie, zbiór elementów wyposażony w dodawanie, odejmowanie i mnożenie, które rozdziela się względem dodawania (a co za tym idzie, także odejmowania) nosi nazwę *pierścienia*. Mamy pierścień liczb całkowitych, mamy pierścień liczb wymiernych (ułamków). Pierścienie są niezwykle rozpowszechnione w naturze, nie tylko wewnątrz systemów liczbowych, ale także, na przykład, służą do opisu ruchu ciał materialnych i pozwalają zrozumieć strukturę materii. Jednym z natychmiastowych wniosków z praw rozdzielności jest to, że mnożenie przez zero zawsze daje zero, a zatem dzielenie przez zero nie jest możliwe.

Ludzkość przez wieki żyła w cieniu praw rodzielności. Tymczasem ok. 2005 roku, niemiecki matematyk Wolfgang Rump zauważył, że aby rozwiązywać jedno z najważniejszych równań w fizyce, równanie Yanga-Baxtera, należy rozpatrywać zbiory elementów, które mają wszystkie cztery działania: dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie – bez żadnych wyjątków. W takim systemie dzielenie przez zero jest jak najbardziej uprawnione. Rump nazwał taki system *klamerką*. W klamerce mnożenie nie może być rozdzielne względem dodawania w zwykły sposób (w przeciwnym razie mnożenie przez zero nie byłoby dozwolone). Zwykłe reguły rozdzielności, tzn. $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ trzeba zastąpić nowymi: $a \times (b + c) = a \times b - a + a \times c$. Łatwo się przekonać, że dzielenie przez zero w klamerce jest możliwe, bo $0 = 1$! Dzięki związkom klamerek z ważnym równaniem w fizyce oraz z innymi istotnymi obiektami matematycznymi, klamerki stały się przedmiotem niezwykle intensywnych badań.

Pod koniec roku 2017, autor tego projektu zauważył, że zarówno klamerki jak i pierścienie można zrozumieć jako emanacje lub szczególne przypadki jednego algebraicznego systemu. Kluczem jest zastąpienie dodawania i odejmowania przez jedną operację, ale na trzech elementach: $[a, b, c] = a - b + c$. Zarówno klasyczne (pierścieniowe) jak i klamerkowe prawa rozdzielności daje się wtedy zapisać w jednolity sposób: $a \times [b, c, d] = [a \times b, a \times c, a \times d]$. Wybór c w powyższym wzorze wyznacza sposób w jaki mnożenie rozdziela się nad dodawaniem (wybierając $c = 0$ dostajemy zwykłe reguły rozdzielności, wybierając $c = 1$, dostajemy klamerkowe). Takie połączenie dodawania z odejmowaniem w jedną operację, nad którą mnożenie się rozdziela, stanowi więc most pomiędzy pierścieniami i klamerkami, i z tego względu struktura taka została nazwana *wiązarem*.

Zarówno pierścienie (od setek lat) jak i klamerki (w ostatniej dekadzie) są uznawane za niezwykle ważne, prawdziwie podstawowe, obiekty matematyczne. Wiązary jednoczą klamerki z pierścieniami. Co więcej, wiązary pozwalają na podjęcie swobodnej decyzji, któremu elementowi nadać szczególną rolę, aby opisywać obserwowane zjawiska za pomocą pierścieni, klamerek, a może jakiegoś pośredniego systemu. Ta swoboda zmienia filozofię badań matematycznych. Celem niniejszego projektu jest lepsze zrozumienie natury wiązarów, aby następnie, poprzez wybranie odpowiednich elementów, dowiedzieć się więcej na temat pierścieni i klamerek.