

Dynamika nieprzemienne i C^* -podalgebry Cartana: ich uogólnienia, własności i zastosowania

Badania i wyniki projektu leżą na przecięciu trzech różnych gałęzi współczesnej matematyki: teorii algebr operatorowych, układów dynamicznych i teorii operatorów.

Teoria algebr operatorowych powstała wkrótce po tym jak mechanika kwantowa zrewolucjonizowała świat fizyki, prawie 100 lat temu. John von Neumann pragnąc ustanowić odpowiednie ramy matematyczne dla nowej teorii fizyków, zaczął studiować algebry, które obecnie nazywane są algebrami von Neumanna (lub W^* -algebrami). Krótco po tym Izrael Gelfand i Mark Naimark rozpoczęli systematyczne badania ogólniejszych struktur, tzw. C^* -algebr. Co więcej, wykazali oni, że każda przemienne C^* -algebra jest algebrą funkcji liczbowych na pewnej konkretnej przestrzeni topologicznej. Zatem w przypadku przemiennym można odtworzyć klasyczny świat z przestrzenią posiadającą punkty. Natomiast nieprzemienne C^* -algebry stanowią elegancki opis „przestrzeni nieprzemiennych” czy też „przestrzeni kwantowych”, w których punktów jako takich nie jesteśmy w stanie „zobaczyć” - odtworzyć. Dzięki pracy matematycznych gigantów XX wieku teoria algebr operatorowych osiągnęła postać szerszą i głębszą niż ktokolwiek mógł przewidzieć. Proponowany projekt ma zaś wnieść istotny wkład w związki tej teorii z układami dynamicznymi i teorią operatorów.

Nieprzemienność dynamiki, pojawiającą się w tytule projektu, można rozumieć dwojako.

Po pierwsze, z klasycznym układem dynamicznym, gdzie punkty ewoluują w czasie, można łączyć C^* -algebrę nieprzemienne – „przestrzeń kwantową”, która jest odpowiednikiem przestrzeni orbit danego układu dynamicznego. Co więcej słynne Twierdzenie Renault z 2008 r. mówi, że znając wyjściową przestrzeń oraz odpowiednią „przestrzeń kwantową” można odtworzyć układ dynamiczny. Przy czym układ dynamiczny jest tu rozumiany jako grupoid. Renault nazwał inkluzje odpowiednich C^* -algebr *inkluzjami Cartana* (na cześć Élie Josepha Cartana – francuskiego matematyka, który zasłużył się ważnymi wynikami z zakresu teorii grup Liego, fizyki matematycznej, geometrii różniczkowej i ogólnej teorii grup).

Po drugie, aby badać „kwantowe układy dynamiczne”, potrzebujemy aparatu matematycznego do opisu dynamiki na nieprzemiennych C^* -algebrach. W projekcie badamy właśnie takie układy, gdzie dynamika jest modelowana przez zaawansowany aparat wiązek Fella nad grupoidami oraz półgrupami inwersyjnymi. Jednym z głównych celów projektu jest uogólnienie Twierdzenia Renault na przypadek kwantowy, tzn. znalezienie warunków na to, kiedy z inkluzji jednej C^* -algebry w drugiej C^* -algebrze możemy odtworzyć wiązkę Fella. Co więcej chcemy opisać własności większej C^* -algebry (modelującej przestrzeń orbit kwantowego układu dynamicznego) za pomocą dynamiki – wiązki Fella. Interesuje nas przede wszystkim opis ideałów tej C^* -algebry oraz kryteria czystej nieskończoności, nuklearności czy tak zwana własność Haagerupa. Opracowane narzędzia planujemy także wykorzystać do analizy widma pojedynczych operatorów działających na przestrzeniach Hilberta oraz na przestrzeniach Banacha typu L_p .