

Wyzwania dynamiki niskowymiarowej w hybrydowych modelach neuronów.

Celem projektu jest zastosowanie i rozwinięcie dość niedawnych wyników z niskowymiarowych układów dynamicznych w analizie złożonej dynamiki niektórych modeli aktywności komórek nerwowych, odzwierciedlającej skomplikowane zjawiska obserwowane w rzeczywistych układach. Obejmuje to uzyskanie nowych rezultatów teoretycznych w oparciu o pytania powstałe podczas badania tych modeli, a następnie wykorzystanie tych wyników w celu uzyskania ścisłego matematycznie opisu zachowania modelu.

Część projektu dotycząca zastosowań poświęcona jest modelom neuronów typu *integrate-and-fire* (IF). Modele neuronów typu integrate-and-fire są szczególnie interesujące w kontekście badań matematycznych, gdyż należą do układów hybrydowych: są połączeniem ciągłych układów dynamicznych (zadanych przez równania różniczkowe zwyczajne, tzw. „układ podprogowy”), modelujących elektrycznie pobudliwe własności komórki nerwowej, z układami dyskretnymi, a mianowicie z mechanizmem resetowania potencjału błonowego komórki po osiągnięciu pewnego progu, co naśladuje w uproszczony sposób emisję impulsu (potencjału czynnościowego). W ostatnich latach układy hybrydowe są obiektem rosnącego zainteresowania ze względu na mnogość zastosowań. Kolejną klasą modeli, którą będziemy się zajmować, są tzw. *map-based models*. Są to dyskretne modele, w których ewolucja napięcia błony neuronowej i emisja potencjału czynnościowego są wyrażone przez iteracje kawałkami gładkich (lub kawałkami ciągłych) odwzorowań. Chociaż układy te wydają się prostsze w porównaniu z hybrydowymi i ciągłymi modelami neuronów i raczej pozostają abstrakcyjne z biologicznego punktu widzenia, często powstają jako dyskretyzacja modeli ciągłych lub hybrydowych. Dlatego naturalne jest porównanie repertuaru zachowań prezentowanych przez te dwa typy modeli i mechanizmów je generujących.

Jednym z narzędzi matematycznych, które działa efektywnie dla obu klas modeli jest teoria rotacji. Jest to gałąź teorii układów dynamicznych, której głównym pojęciem jest tzw. liczba obrotu. Jeśli istnieje liczba obrotu $\rho(f, x)$ punktu x przy odwzorowaniu f , to jest ona miarą średniego przemieszczenia punktów z orbity punktu x przez odwzorowanie f . Teoria rotacji sięga czasów Henri Poincaré, który opracował ją dla homeomorfizmów okręgu. Od tego czasu matematycy rozwinęli teorię rotacji m.in. dla nieciągłych odwzorowań okręgu/odcinka, dla odwzorowań pierścienia czy prostej rzeczywistej z prawie okresowym przemieszczeniem.

W hybrydowych modelach neuronów odwzorowania odcinka i okręgu (często nieciągłe) pojawiają się naturalnie w kontekście tzw. *adaptation-* lub *firing maps*. Są to odwzorowania, których iteracje umożliwiają odtworzenie szeregów czasowych kolejnych impulsów i rozróżnienie między jakościowo innymi zachowaniami komórki. Można tu wymienić np. odpowiedź fazową (powrót do potencjału spoczynkowego po wygenerowaniu kilku impulsów w odpowiedzi na sygnał wejściowy), odpowiedź toniczną (wielokrotnie powtarzane potencjały czynnościowe), *bursting* (kilka impulsów wytwarzanych jest w krótkim odstępie czasu, po czym następuje faza spoczynkowa) i *oscylacje mieszane*, w których „małe” oscylacje podprogowe występują naprzemiennie z okresami aktywności z jednym lub kilkoma impulsami. W przypadku modeli dyskretnych teorię odwzorowań odcinka i okręgu można zastosować bezpośrednio do odwzorowania pierwszego powrotu zmiennej potencjału, które również zawiera informację o właściwościach szeregu kolejnych impulsów. Z drugiej strony, w niektórych przypadkach nasze narzędzia badawcze zostaną wzbogacone np. o metody przestrzeni fazowej (w tym dla układów nieautonomicznych) i geometrycznej teorii zaburzeń osobliwych. Niektóre wyniki będą zilustrowane symulacjami numerycznymi.

Podsumowując, naszym celem jest badanie wybranych miar złożoności takich jak zbiory obrotu i entropia dla pewnych klas odwzorowań niskowymiarowych, rozwinięcie niektórych metod analizy przestrzeni fazowej dla autonomicznych i nieautonomicznych układów ciągłych (odpowiadających układowi podprogowemu) oraz wskazanie dalszych pytań otwartych dotyczących własności dynamicznych tych układów istotnych z punktu widzenia wyżej wymienionych zastosowań. Następnie planujemy wykorzystać uzyskaną wiedzę w jakościowej analizie szeregów czasowych impulsów oraz złożonych oscylacji w modelach neuronów typu IF, w tym w modelach ze zmiennym bądź dynamicznym progiem resetowania. Nasze badania obejmują także istotne biologicznie własności pobudliwości neuronów ujawnione w tych modelach, takie jak *post-inhibitory facilitation* czy *slope-detection*. Spodziewamy się pokazać, że własności te nie ograniczają się do modeli z dynamicznym progiem resetowania, lecz występują także w modelach ze stałym progiem resetowania, ale zawierających zmienną adaptacyjną. Przypuszczamy, że nasze wyniki oraz opracowane metody mogą znaleźć wiele potencjalnych zastosowań, także poza obszarem neuronauk.