Równanie transportu we współczesnej teorii równań różniczkowych cząstkowych

Ten projekt jest poświęcony uogólnieniu i zastosowaniu technik znanych dla równania transportu w celu podjęcia nowych wyzwań stawianych matematyce stosowanej. Równanie transportu jest prawdopodobnie najprostszym w teorii równań różniczkowych cząstkowych i przyjmuje formę:

$$\partial_t \mu_t + \partial_x (b(t,x)\mu_t) = 0. \tag{1}$$

Historycznie, równanie to było rozwiązywane przy użyciu kluczowej obserwacji że wartości rozwiązania w czasie $t = 0$ są propagowane wzdłuż krzywych zwanych charakterystykami i w konsekwencji, rozwiązania (1) są stałe na charakterystykach. Zaskakujące jest to, że wiele zjawisk pochodzących z dynamiki płynów, demografii, biologii komórki lub epidemiologii można opisać w ten sposób.

W tym projekcie chcemy się skupić na następujących celach:

Cel 1. **Równania transportu w przestrzeniach metrycznych**. Sformułowanie (1) wymaga liniowej struktury zbioru na którym jest rozwiązywane, gdyż pochodne muszą być dobrze zdefiniowane. Z drugiej strony, równoważne sformułowanie (1) jako propagacji u na charakterystykach można uogólnić na dowolną przestrzeń metryczną. Wiele modeli badanych w aktualnej literaturze ma taką formę. Jako dobry przykład mogą służyć modele ruchu ulicznego na grafach, które można wykorzystać do oceny przepustowości ulic lub analizy powstawania korków. Jednakże, aby użyć takich modeli, trzeba mieć pewność, że są one dobrze postawione matematycznie i to jest powód, dla którego musimy opracować leżącą u ich podstaw teorię matematyczną.

Cel 2. **Optymalne sterowanie i analiza wrażliwości dla modeli populacji ze strukturą**. Modele postaci (1) opisują dynamikę populacji w różnych dziedzinach, w tym w demografii, biologii komórki, immunologii czy ekologii. Dlatego w tej części projektu badamy wersję (1) z parametrem h:

$$\partial_t \mu_t^h + \partial_x (b(h,x)\mu_t^h) = 0, \tag{2}$$

i interesuje nas w szczególności analiza funkcjonału postaci

$$\mathcal{J}(h,t) = \int_{\mathbb{R}^d} F(x)\, \mathrm{d}\mu_t^h(x), \tag{3}$$

gdzie μ_t^h jest rozwiązaniem miarowym (2) a $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ jest ustaloną funkcją. Zauważamy, że funkcjonały postaci (3) mogą być interpretowane jako wielkości o znaczeniu praktycznym. Na przykład dla $F(x) = 1$, ten funkcjonał opisuje całkowitą liczbę osobników w populacji. Skupimy również naszą uwagę na nieliniowej wersji (2), w której funkcja b może zależeć od samego rozwiązania.

Cel 3. **Ewolucyjne równania cząstkowe ze zmieniającymi się w czasie operatorami**. Wiele zjawisk w świecie rzeczywistym opisuje równania z operatorami szybko zmieniającymi się z czasem. Jako przykład może służyć przepływ płynów elektroreologicznych. Płyny te są opisane przez układ równań:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0,$$
$$\partial_t \mathbf{v} + \operatorname{div}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) - \mathbf{S} = -\nabla p + \mathbf{g} + \nabla \mathbf{E} \cdot \mathbf{P},$$

gdzie $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ oznacza prędkość płynu, $\mathbf{S}$ to tensor naprężeń, $\mathbf{E}$ to natężenie pola elektrycznego a $\mathbf{P}$ to polaryzacja. Gdy płyn znajduje się w polu elektrycznym, tensor naprężeń zmienia się gwałtowanie i zachowuje się jak $\mathbf{S} \sim |D(\mathbf{v})|^{r(t,x)} D(\mathbf{v})$ dla pewnej funkcji $r(t,x)$ gdzie $D(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}\left(\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T\right)$ to symetryczna część gradientu $\nabla \mathbf{v}$. Jeżeli zmiany pola elektrycznego są bardzo nieregularne, nie można zakładać, że funkcja $r(t,x)$ jest ciągła ze względu na czas t. Chociaż wydaje się, że takie problemy nie są związane z (1), ich analiza matematyczna wymaga triku znanego z teorii znormalizowanych rozwiązań dla (1) (odpowiadającej przypadkowi, w którym b jest mniej regularną funkcją).