Problemy klasyfikacji w dynamice topologicznej i teorii ergodycznej

(Popularnonaukowe streszczenie projektu)

Układy dynamiczne to modele procesów zmieniających się w czasie. Ich analiza pomaga nam zrozumieć i przewidzieć przyszłość procesów opisywanych przy pomocy równań i funkcji. Matematyczna teoria układów dynamicznych dostarcza nam narzędzi do analizy tych modeli. Analiza ta umożliwia nie tylko przewidywanie zachowanie istniejących modeli, ale także pozwala na dowodzenie czego przy pomocy tych modeli opisać się nie da. Mówiąc ogólniej, matematyka potrafi nie tylko modelować rzeczywistość, ale także badać własne ograniczenia. Najsłynniejsze matematyczne niemożliwości

- dowód piątego aksjomatu Euklidesa na podstawie pierwszych czterech,
- kwadratura koła, czyli konstrukcja cyrklem i linijką kwadratu o polu równym polu danego koła.
- wyrażenie pierwiastków wielomianu stopnia piątego poprzez jego współczynniki wykonując (skończoną liczbę razy) tylko cztery działania arytmetyczne i pierwiastkowanie.

Co łączy te wyniki? Mówią one o nieistnieniu rozwiązania problemu w ściśle określony sposób.

W czasie trwania projektu spróbujemy wykazać, że niektóre problemy klasyfikacyjne w teorii układów dynamicznych nie mogą być rozwiązane przy pomocy przeliczalnych algorytmów. Zauważmy, że nieistnienie takich indukcyjnych algorytmów, to o wiele więcej niż nieistnienie klasycznych (skończonych) algorytmów na rozwiązanie problemu. Spróbujemy także wyznaczyć miejsce problemów klasyfikacji w dynamice topologicznej i teorii ergodycznej w ogólnej „hierarchii trudności" problemów klasyfikacji.

Badając jakąkolwiek klasę obiektów matematycznych, we naturally try to classify them. Ale cóż to znaczy? Powiedzmy, że interesuje nas jak rozkłada się wzrost w zbiorze wszystkich ludzi H. Z tego punktu widzenia, dwie osoby tego samego wzrostu są nierozróżnialne (w żargonie matematycznym mówimy, że należą one do tej samej klasy równoważności). To prowadzi nas do pojęcia relacji równoważności, to znaczy podziału zbioru (ogółu interesujących nas obiektów, np. zbioru H) na rozłączne części zawierające wszystkich członków naszego zbioru, których nie jesteśmy w stanie odróżnić z pewnego punktu widzenia (podział na klasy równoważności). Teraz możemy sklasyfikować nasze klasy równoważności, jeśli istnieje sposób na powiązanie z każdą klasą jednego punktu w pewnej przestrzeni (możemy o tym myśleć jak o przypisaniu każdej klasie równoważności konkretnej liczby), który to punkt opisuje całą klasę. W naszym przykładzie możemy skojarzyć z każdym zbiorem ludzi o tym samym wzroście liczbę, która jest wysokością każdego członka klasy mierzoną w centymetrach (dla uproszczenia zaokrąglamy wysokości do liczb całkowitych). W ten sposób ładnie sklasyfikowaliśmy wszystkie klasy równoważności przypisując im liczby takie jak 167, 178 lub 201.

Z matematycznego punktu widzenia nasze skojarzenie nie może być zupełnie dowolne. Powinno mieć dobre właściwości strukturalne, które pozwalają nam na rozwiązanie problemu znalezienia wartości związanej z daną klasą (obliczenie tej wartości). W niniejszym projekcie przyjmujemy, że właściwym językiem do ścisłego wyrażania obliczalności jest język redukowalności borelowskiej. Mówiąc nieściśle, obiekty borelowskie na przestrzeniach polskich są definiowane za pomocą indukcyjnych protokołów pozaskończonych z przeliczalną ilością danych początkowych. Obiekty borelowskie możemy indukcyjnie przybliżać, otrzymując przybliżenia obarczone dowolnie małym błędem. Są to więc obiekty „konkretne" w sposób nieosiągalny dla funkcji powołanych do istnienia przez odwołanie się do aksjomatu wyboru.

Cel tego projektu sprowadza się więc do obliczenia złożoności różnych obiektów matematycznych pojawiających się w teorii ergodycznej i dynamice topologicznej. Podstawową metodą, którą zastosujemy, jest redukcja borelowska, czyli narzędzie służące do dowodzenia, że niektóre problemy klasyfikacyjne są niemożliwe. Pojawiło się ono pod koniec lat 80. w pracach Friedmana i Stanleya (1989) oraz, niezależnie, u Harringtona, Kechrisa i Louveau. Pomysł zaczyna się od spostrzeżenia: Aby rozwiązać problem A, zredukuj go do problemu B, dla którego rozwiązanie jest znane. I odwrotnie: Aby pokazać, że rozwiązanie B jest niemożliwe, zacznij od znanego niemożliwego problemu A i zredukuj go do B. Jak zwykle wygląda to znacznie łatwiejsze niż jest w rzeczywistości. Aby skonstruować redukcję naszego znanego niemożliwego problemu do problemu klasyfikacji układów dynamicznych, potrzeba dobrego tych ostatnich. Zdobyciu tej wiedzy będzie poświęcony ten projekt.