Procesy Lévy'ego i nielokalne operatory Schrödingera

Zbadamy nielokalne operatory Schrödingera postaci $H = -L+V$, gdzie L jest generatorem symetrycznego procesu Lévy'ego ze skokami w $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, a V jest dostatecznie regularnym potencjałem deterministycznym lub losowym.

Nasze podstawowe motywacje pochodzą z fizyki kwantowej. Klasyczne równanie Schrödingera jest jednym z najważniejszych równań mechaniki kwantowej – opisuje ono jak zmienia się stan kwantowy układu fizycznego w czasie. Podstawowym obiektem tej teorii jest operator Schrödingera, który jest hamiltonianem układu. W przypadku pojedynczej cząstki poruszającej się w polu elektrostatycznym o potencjale V jest on postaci $H = H_0 + V$ w reprezentacji położeniowej, gdzie $H_0 = -\Delta$ (symbol Δ oznacza tu klasyczny operator Laplace'a), a V jest operatorem mnożenia przez funkcję. Stany stacjonarne układu opisywane są jednoznacznie przez rozwiązania zagadnienia własnego $H\Phi = E\Phi$, tzn. przez funkcje i wartości własne operatora Schrödingera H (tzw. stany i poziomy energetyczne układu).

Operator H_0 odpowiada kwantyzacji energii kinetycznej. Ze szczególnej teorii względności wynika, że wybór $H_0 = -\Delta$ jest właściwy jedynie dla małych energii i prowadzi do błędnych wyników dla dużych energii. Takie poprawki relatywistyczne do teorii klasycznej mogą być opisywane przez modele matematyczne wykorzystujące *nielokalne operatory Schrödingera*. W tym przypadku $H_0 = -L$, gdzie L jest generatorem pewnego *symetrycznego procesu Lévy'ego ze skokami*. Szczególne miejsce zajmują tu operatory H, których części kinetyczne są *operatorami ułamkowymi* postaci

$$H_0 = (-\Delta + m^{2/\alpha})^{\alpha/2} - m \qquad \text{oraz} \qquad H_0 = (-\Delta)^{\alpha/2}, \qquad \alpha \in (0,2),\ m > 0.$$

W przypadku $\alpha = 1$ operatory te nazywane są odpowiednio *quasi-relatywistycznymi* i *ultra-relatywistycznymi* hamiltonianami. Obydwa te operatory były wykorzystane do zbadania problemu *stabilności i niestabilności relatywistycznej materii.* Funkcje i wartości własne nielokalnych operatorów Schrödingera mogą być efektywnie badane przy pomocy ich półgrup schrödingerowskich $\left\{e^{-tH} : t \geq 0\right\}$, zaś półgrupy te można badać metodami probabilistycznymi opartymi na reprezentacji Feynmana–Kaca. Jest to możliwe dzięki temu, że operatory te pochodzą od symetrycznych procesów Lévy'ego ze skokami. Z tego samego powodu również modele matematyczne oparte na nielokalnych operatorach Schrödingera mogą być zinterpretowane probabilistycznie w podobny sposób jak ich klasyczne odpowiedniki, które związane są z procesami dyfuzyjnymi. Tego typu rozważania są częścią stochastycznej mechaniki kwantowej zapoczątkowanej przez E. Nelsona.

Teoria nielokalnych operatorów Schrödingera została istotnie rozwinięta przez ostatnie 30 lat. Pomimo tak dużego postępu nadal wiele ważnych pytań dotyczących podstawowych własności spektralnych i analitycznych tych operatorów pozostaje bez odpowiedzi.

W ramach tego projektu proponujemy zbadanie szerokiej klasy nielokalnych operatorów Schrödingera metodami probabilistycznymi i analitycznymi. Nasze podejście oparte będzie na wykorzystaniu reprezentacji Feynmana–Kaca oraz nowoczesnych narzędzi probabilistycznej teorii potencjału procesów Lévy'ego. Badania obejmą m.in. operatory kinetyczne postaci $H_0 = \phi(-\Delta)$, gdzie ϕ jest funkcją operatorowo monotoniczną, w tym ważne przykłady ułamkowe wspomaniane powyżej. Zbadamy modele z potencjałami przyciągającymi i odpychającymi (typu wiążącego) oraz operatory zaburzone przez $\mathbb{Z}^d$-ergodyczne pola losowe (alloy-type potentials), które odgrywają kluczową rolę w teorii ośrodków nieuporządkowanych (model Andersona).

Zaproponowane problemy badawcze koncentrują się na fundamentalnych własnościach półgrup ewolucyjnych i podstawowych obiektów spektralnych związanych z nielokalnymi operatorami Schrödingera. Zbadamy asymptotykę dla małych czasów półgrup schrödingerowskich, L^p-regularność wewnętrznych półgrup schrödingerowskich oraz zachowanie asymptotyczne związanych z nimi procesów stanu podstawowego, które są skokowymi odpowiednikami $P(\phi)_1$-procesów z nelsonowskiej stochastycznej mechaniki kwantowej. Znajdziemy także ostre oszacowania dla izolowanych wartości własnych i opiszemy przejścia jakościowe tempa zaniku odpowiadających im funkcji własnych. W przypadku potencjałów losowych zbadamy osobliwość typu Lifshitza całkowej gęstości stanów dla modeli z potencjałami o nieograniczonym zasięgu oraz zbadamy asymptotykę rozwiązań probabilistycznych nielokalnego parabolicznego zagadnienia Andersona. Rozwiniemy także teorię dyskretnych nielokalnych operatorów Schrödingera.

Problemy te leżą na styku kilku obszarów matematyki i fizyki, w tym prawdopodobieństwa i procesów stochastycznych, analizy funkcjonalnej, RRC oraz fizyki matematycznej. Spodziewamy się, że nasze wyniki wzbudzą zainteresowanie szerokiego grona ekspertów prowadzących badania we wszystkich tych obszarach.