“Kombinatoryka oraz Geometria Matroidów i Wielościanów”

Matroidy i wielościany kratowe są podstawowymi strukturami w optymalizacji kombinatorycznej oraz kombinatorycznej geometrii algebraicznej. Są zatem częścią matematyki w której interakcja algebry i geometrii algebraicznej z kombinatoryką jest szczególnie silna i istotna. Ten obszar badań jest obecnie bardzo aktywny i nasz projekt się w niego wpisuje. Wyróżniamy sześć grup tematów badawczych.

Ideał toryczny matroidu. Rozmaitości toryczne są klasą rozmaitości algebraicznych, która z jednej strony zawiera wiele rozmaitości znanych z zastosowań, a z drugiej strony jest bardziej podatna na techniki kombinatoryczne. Istotnie, geometria rozmaitości torycznej jest w pełni zdeterminowana przez kombinatorykę związanego z nią wachlarza. Kiedy rozmaitość algebraiczną konstruuje się przy użyciu wyłącznie danych kombinatorycznych, oczekuje się również kombinatorycznego opisu jej równań definiujących oraz innych struktur algebraicznych. Próba osiągnięcia tego opisu często prowadzi do zaskakująco głębokich pytań kombinatorycznych. Dobrym przykładem jest hipoteza White'a o ideale torycznym matroidu. Zaświadcza ona, że ideał toryczny matroidu generowany jest przez kwadratowe dwumiany odpowiadające symetrycznym wymianom. Hipoteza White'a opiera się licznym próbom rozstrzygnięcia od 1980. Naszym ostatecznym celem jest rozstrzygnięcie hipotezy White'a, jak również silniejszych pytań Herzoga i Hibiego dotyczących własności Koszula oraz istnienia kwadratowej bazy Gröbnera. Będziemy badali właściwości rezolwenty ideału, a w szczególności analizowali własności tabeli Bettiego.

Własności wymiany baz matroidu. Ta część projektu bada najbardziej podstawową ideę teorii matroidów, a mianowicie własności wymiany baz. Co zaskakujące, nie są one jeszcze w pełni zrozumiane. Grafy baz matroidów, czyli grafy zawierające informacje o wymianie pojedynczego elementu pomiędzy bazami, zostały intensywnie zbadane w latach 1960-tych i 1970-tych. Są dość dobrze opisane, np. ich lokalna charakteryzacja jest znana. Jednak wiele podstawowych pytań (takich jak spójność, średnica) na temat ich naturalnych podgrafów pozostaje w pełni otwartych. Ściśle powiązana jest hipoteza o cyklicznym uporządkowaniu, która przedstawia odpowiedni warunek konieczny i wystarczający.

Wielościan baz matroidu. Istnieje dobrze zrozumiana hierarchia własności wypukłych wielościanów kratowych, które mają wpływ na odpowiadające rozmaitości toryczne. Na przykład, jeśli wielościan ma regularną unimodularną kwadratową triangulację, wówczas jego ideał toryczny ma kwadratową bazę Gröbnera. Istnienie takiej triangulacji jest najsilniejszą własnością w tej hierarchii. Jest to problem otwarty dla wielościanu baz matroidu, o którym wiadomo, że posiada najsłabszą własność w hierarchii – normalność. Niedawno udowodniono, że wielościany baz matroidów mają nieco silniejszą właściwość – całkowitą własność Carathéodoriego, jak przypuszczał Cunningham. Naszym celem jest odkryć własności kombinatoryczne klasy wielościanów baz matroidów i ich podklas.

$(1, -1)$**-wielościany związane z obiektami kombinatorycznymi.** Dobrze ugruntowanym tematem w kombinatoryce algebraicznej jest badanie obiektu kombinatorycznego za pomocą powiązanego z nim wielościanu kratowego i dalej poprzez odpowiadającą rozmaitość toryczną. Dokładnie tak samo jak dla matroidu badamy wielościan baz matroidu. W większości przypadków takie wielościany są podzbiorami kostki, w szczególności nie posiadają punktów wewnętrznych. Chcemy wyjść poza te konstrukcje, zastępując dotychczas używane funkcje charakterystyczne funkcjami charakterystycznymi ze znakiem. W rezultacie otrzymamy wielościan z punktem zerowym we wnętrzu. Zatem, oprócz wszystkich klasycznych pytań, przestudiujemy kiedy otrzymujemy wielościan refleksyjny i jakie są jego własności.

Wzajemność dla matroidów. Wielomian chromatyczny grafu jest podstawowym niezmiennikiem algebraicznym. Kiedy ewaluujemy go w -1, otrzymujemy liczbę acyklicznych orientacji grafu. Jest to przykład ‘twierdzenia o wzajemności’. Naszym celem jest znalezienie takiego twierdzenia dla matroidów.

Prawie pokrycia. W wielu geometriach punkt-linia (punkt-powierzchnia), aby pokryć wszystkie punkty oprócz jednego, potrzeba więcej linii niż do pokrycia wszystkich punktów. Jednym z przykładów tego zjawiska jest gdy chcemy pokryć za pomocą afinicznych hiperpłaszczyzn wszystkie wierzchołki poza jednym kostki n-wymiarowej – prawie pokrycie. Twierdzenie Alona i Fürediego gwarantuje, że w tym przypadku potrzebne jest n hiperpłaszczyzn. Natomiast wszystkie wierzchołki można pokryć zaledwie 2 hiperpłaszczyznami. Dowody tego rodzaju wyników prawie zawsze wymagają narzędzi algebraicznych, takich jak Combinatorial Nullstellensatz Alona. Jedną z wersji problemu badanego w projekcie są prawie k-pokrycia kostki n-wymiarowej, ale będziemy również szukać nowych przykładów.