Rangi tensorowe i własność addytywności rangi

Niniejszy projekt dotyczy badań nad tensorami. *Tensor* to wielowymiarowa tablica. Bardziej formalnie tensor d-kierunkowy lub tensor rzędu d, to element iloczynu tensorowego d przestrzeni wektorowych. Można o nim myśleć jak o punkcie z d-wymiarowej przestrzeni. Tensor rzędu 1 to wektor, tensor rzędu 2 to macierz (tabela z liczbami). Przykładem tensora trzeciego rzędu jest kostka Rubika, gdzie w każdej małej kostce (oraz w środku kostki Rubika) jest liczba. Dla ułatwienia nie będziemy się skupiać na wyższych rzędach.

W 1927 Hitchcock zaproponował pomysł poliadycznej formy tensora, t.j. wyrażenie tensora jako sumę skończonej liczby tensorów prostych. Tensor prosty (d-kierunkowy) to iloczyn tensorowy d wektorów.

Ranga tensora p to minimalna liczba $R(p)$ tensorów prostych taka, że p można zapisać jako ich kombinacja liniowa. $R(p) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $p = 0$. $R(p) = 1$, gdy p jest tensorem prostym. Ogólnie, im wyższa ranga, tym bardziej skomplikowany jest tensor.

Definicja rangi tensorowej jest analogiczna do definicji rzędu macierzy, ale własności macierzy i tensorów są różne. Na przykład nie ma uniwersalnego algorytmu liczenia rangi tensorów.

Naszym głównym zainteresowaniem jest addytywność rangi tensorowej. Jeżeli mamy dane dwa tensory w niezależnych przestrzeniach wektorowych, czy zachodzi *addytywność rangi*, t.j. czy ranga sumy tensorów jest równa sumie rang? Twierdząca odpowiedź na to pytanie była szeroko znana pod nazwą hipoteza Strassena, aż do obalenia jej przez Y. Shitova w 2017.

Mówiąc nieformalnie, własność mówi, że mając dwa niezależne tensory w różnych przestrzeniach tensorowych, nie jest łatwiej pracować z oboma naraz w tym samym czasie niż po kolei. W przypadku tensorów mnożenia macierzy własność mówi, że nie ma szybszego sposobu pomnożenia dwóch par macierzy niż mnożyć je po jedna po drugiej. Niestety Shitov nie podał jawnego kontrprzykładu, tylko wykazał, że taki istnieje.

Chcielibyśmy scharakteryzować rodziny par tensorów z własnością addytywności rangi i znaleźć jawne przykłady par bez tej własności. W zastosowaniach w innych naukach i technice często wystarczy znać przybliżenie rangi tensora. Pojęciem, które określa ile co najmniej tensorów prostych potrzebujemy, żeby dostać idealne przybliżenie (tak dokładne jak chcemy) jest brzegowa ranga tensora. Można też szukać najlepszego przybliżenia rangi tensora. Właściwą nazwą reprezentującą ten pomysł jest *ranga brzegowa*. Możemy zadać podobne pytania co dla rangi. Czy ranga brzegowa jest addytywna? Już wiemy, że nie w każdym przypadku. Nawet znamy przykłady, kiedy odpowiedź jest negatywna, ale chcielibyśmy znaleźć mniejszy przykład.

Innym zadaniem jest sprawdzanie, czy tensor ma daną rangę. Nie mamy na to uniwersalnego sposobu. Chcielibyśmy znaleźć sposób, który byłby lepszy od dotychchczasowych metod.