Schematy Hilberta z wielogradacją

Jednym z podstawowych obiektów badanych w geometrii algebraicznej są *rzutowe rozmaitości algebraiczne*. *Rzutowa przestrzeń n-wymiarowa* $\mathbb{P}^n$ składa się z $n+1$-krotek liczb zespolonych, przy czym dwie takie krotki $(a_0,...,a_n)$ i $(b_0,...,b_n)$ są utożsamiane, jeżeli istnieje niezerowa liczba zespolona λ taka, że $a_i = \lambda b_i$ dla $i = 0,...,n$. Skończony zbiór jednorodnych wielomianów w $n+1$-zmiennych definiuje rzutową podrozmaitość $\mathbb{P}^n$ - zbiór punktów, w których wszystkie te wielomiany się zerują. Jednym z najprostszych przykładów jest skończony zbiór punktów $\mathbb{P}^n$. Dla ustalonych liczb naturalnych n i r, istnieje schemat rzutowy (uogólnienie rozmaitości rzutowej) nazywany *schematem Hilberta* i oznaczany $Hilb_n^r$, który parametryzuje wszystkie r-krotki punktów $\mathbb{P}^n$ i ich uogólnienia (nazywane *zero-wymiarowymi podschematami długości r*), otrzymane przez rozpatrywanie punktów z krotnościami. Oznacza to, że punkty $Hilb_{n-1}^r$ odpowiadają w naturalny sposób zero-wymiarowym podschematom $\mathbb{P}^n$ długości r. Niech $S = \mathbb{C}[x_0,...,x_n]$ będzie pierścieniem wielomianów w $n+1$-zmiennych. Każdemu obiektowi geometrycznemu - r-krotce punktów, odpowiadają obiekty algebraiczne - *ideały* w pierścieniu wielomianów S. Co więcej, każdemu obiektowi geometrycznemu R można w jedyny sposób przypisać obiekt algebraiczny, który jest w pewnym sensie optymalny. Ten ideał nazywamy ideałem *nasyconym* R.

Haiman and Sturmfels opisali schematy Hilberta z wielogradają. Ich konstrukcja zawiera $Hilb_{n-1}^r$ jako szczególny przypadek. Ten projekt dotyczy dwóch zagadnień związanych ze schematami Hilberta z wielogradacją. Pierwszy polega na badaniu pewnego szczególnego przypadku, który jest blisko związany z opisanym wyżej schematem Hilberta. Dla ustalonych liczb naturalnych r,n można rozpatrywać schemat Hilberta z wielogradacją $H_S^{f_{n,r}}$. Jego punkty odpowiadają pewnym ideałom w S, które opisują zero-wymiarowe podschematy $\mathbb{P}^n$ długości r. Jednak, w odróżnieniu od schematu Hilberta $Hilb_{n-1}^r$, schemat $H_S^{f_{n,r}}$ parametryzuje nie obiekty geometryczne - podschematy $\mathbb{P}^n$ ale pewne ich algebraiczne opisy - ideały w S. Niektóre punkty $H_S^{f_{n,r}}$ odpowiadają ideałom nasyconym, tzn. kanonicznym wyborom algebraicznego opisu odpowidającego obiektu geometrycznego. Oznaczmy zbiór tych punktów przez $U_{n,r} \subseteq H_S^{f_{n,r}}$. Celem projektu jest sklasyfikowanie wszystkich ideałów odpowiadających punktom $H_S^{f_{n,r}}$, które są w pewnym sensie blisko punktu z $U_{n,r}$. Jest to zagadnienie związane z problemem liczenia rangi brzegowej wielomianu i dlatego efektywna klasyfikacja takich ideałów powinna doprowadzić do nowych wyników w teorii rang tensorów.

Drugie zadanie polega na badaniu spójności schematów Hilberta z wielogradacją. Intuicyjnie, przestrzeń jest spójna, jeżeli jest w jednym kawałku. Schemat Hilberta $Hilb_{n-1}^r$ jest zawsze spójny. Istnieje natomiast przykład niespójnego schematu Hilberta z wielogradacją. Jednym z celów projektu jest znalezienie warunków gwarantujących spójność schematu Hilbert z wielogradacją. Co więcej, wspomniany wyżej przykład jest dosyć duży więc dobrze by było znaleźć prostszy przykład niespójnego schematu Hilberta z wielogradacją.