Popularnonaukowe streszczenie projektu

Projekt dotyczy ważnych obszarów analizy Fouriera i teorii operatorów z zastosowaniami do równań różniczkowych cząstkowych. Zasadniczym celem badań będzie rozwiązanie trudnych hipotez i odpowiedź na pytania postawione w projekcie. Udowodnienie tych wyników będzie miało wartościowy wkład do teorii transformaty Fouriera, teorii wielowymiarowych szeregów Fouriera, analizy funkcji Boole'a, interpolacji operatorów, ideałów operatorów Lipschitza na przestrzeniach metrycznych, teorii operatorów Calderóna–Zygmunda, lokalnej teorii przestrzeni Hardy'ego szeregów Dirichleta oraz przyczyni się do rozwinięcia teorii s-liczb dla operatorów wieloliniowych. Badania będą dotyczyły następujących tematów o szerokim spektrum:

- Multiplikatory ograniczonych funkcji Boole'a na nieskończenie wymiarowej kostce
- Transformata Fouriera między przestrzeniami funkcyjnymi z zastosowaniami do równania Schrödingera
- Średnica arytmetyczna, zbiory Sidona i multiplikatory przestrzeni Hardy'ego szeregów Dirichleta
- Zbieżność prawie wszędzie wielowymiarowych szeregów Fouriera
- Singularne operatory Calderóna-Zygmunda z zastosowaniami do równań różniczkowych
- Interpolacja operatorów dwuliniowych metodą średnich
- Stabilność izomorfizmów na przestrzeniach interpolacyjnych generowanych metodą średnich
- s-liczby i ideały operatorów wieloliniowych
- (q, p)-sumujące operatory Lipschitza na przestrzeniach metrycznych

Opiszemy jedynie niektóre zasadnicze cele związane z powyższymi zadaniami badawczymi. Planujemy udowodnić nowe rezultaty we wskazanych obszarach. Uzyskane w ostatnim okresie pewne wyniki o funkcjach boolowskich na skończenie wymiarowej kostce Boole'a są źródłem nowych, oryginalnych, nietrywialnych hipotez. W związku z tym planujemy rozwinąć pewne idee na bazie analizy Fouriera na grupach abelowych oraz twierdzenia faktoryzacyjnego Grothendiecka–Pietscha do analizy funkcji boolowskich na nieskończenie wymiarowej kostce. Można oczekiwać, że rozwiązanie postawionych hipotez wniesie ważny wkład to teorii funkcji Boole'a. Szczególnie ważnym celem projektu będzie udowodnienie postawionej w projekcie hipotezy o zbieżności prawie wszędzie wielokrotnych szeregów Fouriera na polytopach dla funkcji z przestrzeni typu Ariasa de Reyny na torusie wielowymiarowym. Rozwiązanie tej hipotezy z pewnością byłoby spektakularnym osiągnięciem i poprawiłoby najlepsze znane do tej pory wyniki, w szczególności znany rezultat C. Feffermana. W zakresie tematyki związanej z przestrzeniami Hardy'ego kluczowym zadaniem będzie zastosowanie metod analizy harmonicznej oraz lokalnej teorii przestrzeni Banacha do badania lokalnej struktury przestrzeni Hardy'ego ograniczonych szeregów Dirichleta oraz mnożników dla tej przestrzeni. W obszarze teorii interpolacji głównym celem będzie udowodnienie twierdzeń o stabilności izomorfizmów między przestrzeniami interpolacyjnymi generowanymi metodą średnich oraz twierdzeń interpolacyjnych dla operatorów dwuliniowych między tymi przestrzeniami. Ważnym polem badań będzie analiza transformat Fouriera i mnożników Fouriera między funkcyjnymi przestrzeniami Banacha oraz zastosowanie ich do rozwiązania równania różniczkowego cząstkowego Schrödingera. Badane będą również operatory singularne Calderóna–Zygmunda pod kątem zastosowań do równań różniczkowych cząstkowych. Ważnym celem projektu będzie zbudowanie fundamentalnych podstaw do teorii s-liczb dla operatorów wieloliniowych oraz zaincjowanie badań (q, p)-sumujących operatorów Lipschitza dla $1 \leqslant p < q < \infty$. Tutaj jednym z kluczowych i nietrywialnych problemów będzie udowodnienie nieliniowej wersji głębokiego twierdzenia faktoryzacyjnego Pisiera dla tego typu operatorów z przestrzeni $C(K)$ do zupełnych przestrzeni metrycznych. Głównym powodem podjęcia danej tematyki badawczej w obszarach analizy Fouriera i teorii operatorów jest jej oryginalność. Tematyka związana z funkcjami boolowskimi motywowana jest ważnymi zastosowaniami tych funkcji m.in. w kwantowej teorii informacji, teorii sygnałów oraz teorii grafów. W zakresie tematyki badawczej związanej z analizą Fouriera problem dotyczący zbieżności prawie wszędzie należy do fundamentalnych problemów w analizie Fouriera. Zatem udowodnienie nowych rezultatów związanych z tym problemem z pewnością będzie wnosiło wartościowy wkład do teorii szeregów Fouriera. Teoria operatorów jest ważnym działem współczesnej analizy funkcjonalnej, która ma liczne zastosowania w wielu działach matematyki. Ten fakt jest solidną motywacją do prowadzenia badań, których rezultaty będzie można z powodzeniem zastosować w analizie spektralnej oraz teorii równań różniczkowych cząstkowych.