TEORIA ERGODYCZNA: POŁĄCZENIA, EFEKTYWNA ROZŁĄCZNOŚĆ I ZASTOSOWANIA - STRESZCZENIE POPULARNONAUKOWE

Zamiarem projektu jest sformułowanie i rozwiązanie interesujących, czysto dynamicznych problemów związanych ze zjawiskami rozłączności i sztywności powstałych wokół słynnej hipotezy Sarnaka (z roku 2010) o losowości funkcji Möbiusa $\boldsymbol{\mu}$, tzn.:

(S) $\qquad \lim_{N\to\infty}(1/N)\sum_{n\leqslant N} f(T^n x)\boldsymbol{\mu}(n) = 0$

dla wszystkich $x \in X$ oraz „obserwowalnych" $f \in C(X)$ na zwartej przestrzeni metrycznej X, na której dynamika jest reprezentowana przez homeomorfizm $T : X \to X$ o **zerowej entropii**. Hipoteza (S) jest zgodna z naszą intuicją, że ciąg losowy (tutaj reprezentowany przez $\boldsymbol{\mu}$) nie może korelować z „obserwowalnymi o niskiej złożoności". Funkcja Möbiusa $\boldsymbol{\mu} : \mathbb{N} \to \{-1, 0, 1\}$ jest jedną z najważniejszych w teorii liczb: jest ona multyplikatywna a jej losowość jest wyrażona wzajemnym skracaniem się $+1$ oraz -1 ($\lim_{N\to\infty}(1/N)\sum_{n\leqslant N} \boldsymbol{\mu}(n) = 0$), co jest równoważne twierdzeniu o liczbach pierwszych, natomiast warunek $\sum_{n\leqslant N} \boldsymbol{\mu}(n) = \mathrm{O}(N^{1/2+\varepsilon})$, dla dowolnego $\varepsilon > 0$, jest już równoważny hipotezie Riemanna.

Chociaż (S) wygląda na problem dynamiki topologicznej, hipoteza ta jest problemem teorio-ergodycznym. Aby to zobaczyć, wystarczy rozważyć $\boldsymbol{\mu}$ jako punkt w przestrzeni $\{-1, 0, 1\}^{\mathbb{N}}$ (na której rozpatrujemy shift lewostronny S) i pisząc lewą stronę (S) jako całkę funkcji $f \otimes \theta$ ($\theta(y) = y_0$) zdefiniowanej na $X \times \{-1, 0, 1\}^{\mathbb{N}}$ po mierze „empirycznej" $\frac{1}{N}\sum_{n\leqslant N} \delta_{(T\times S)^n(x,\boldsymbol{\mu})}$. Ponieważ zbiór miar jest zwarty, każda słaba granica κ tych miar empirycznych jest **połączeniem** pomiędzy pewną miarą niezmienniczą dla T i pewną miarą dla podshiftu $X_{\boldsymbol{\mu}}$ wyznaczonego przez $\boldsymbol{\mu}$. Ze względu na numeryczne kryterium (poniżej) Daboussi'ego-Delange'a-Kátaia-Bourgaina-Sarnaka-Ziegler (DDKBSZ), dla danego układu dynamicznego (X, T), ortogonalność obserwowalnych i ustalonej ograniczonej funkcji multyplikatywnej jest ściśle związana z klasyczną rozłącznością (Furstenberga) różnych potęg pierwszych układu dynamicznego. To stanowi pomost pomiędzy (analityczną) teorią liczb i teorią ergodyczną, który z kolei stawia szereg fundamentalnych pytań w samej teorii ergodycznej: lepszego zrozumienia rozłączności w przypadku nieergodycznym, możliwości otrzymania ciągów numerycznych pozwalających na rozróżnianie układów deterministycznych i niedeterministycznych, prób znalezienia najlepszego dynamicznego odpowiednika kryterium DDKBSZ oraz dowodzenia twierdzeń o liczbach pierwszych lub pół-pierwszych w układach dynamicznych, aby wspomnieć tylko kilka ważnych kierunków badań. Oczywiście, pojawia się szereg pytań szczegółowych szczególnie dotyczących tzw. dynamiki parabolicznej, czy zagadnień rozłączności i sztywności.

Układ Möbiusa $X_{\boldsymbol{\mu}}$ ma naturalny faktor dany przez $\boldsymbol{\mu}^2$ (funkcję charakterystyczną zbioru liczb bezkwadratowych), który, jak zauważył Sarnak, ma dodatnią entropię. Naturalnym terenem badania własności podshiftu $X_{\boldsymbol{\mu}^2}$ jest teoria układów $\mathscr{B}$-wolnych, której rozwijanie (i rozwiązanie kilku otwartych problemów) jest również ważnym kierunkiem badań w projekcie.

2. Wpływ na teorię ergodyczną. Nowatorskość: Najbardziej nowatorskie części projektu dotyczą: twierdzeń o liczbach pół-pierwszych w dynamice (którego wcześniej nie badano), konsekwencji dynamicznych zbieżności na krótkich przedziałach. Ponadto pomysł wewnętrznej ergodyczności układów o zerowej entropii wskazywałby na całkowicie nową i fundamentalną różnicę pomiędzy determinizmem i chaosem w teorii układów dynamicznych.

3. Metodologia: Czołową rolę pełni numeryczne kryterium DDKBSZ: *jeśli ciąg ograniczony* (f_n) *spełnia* $\lim_{N\to\infty}(1/N)\sum_{n\leqslant N} f_{pn}\overline{f}_{qn} = 0$ *dla wszystkich wystarczająco dużych liczb pierwszych* $p \neq q$, *to* $\lim_{N\to\infty}(1/N)\sum_{n\leqslant N} f_n\boldsymbol{u}(n) = 0$ *dla dowolnej ograniczonej funkcji multyplikatywnej* $\boldsymbol{u}$, co zastosowane w kontekście dynamicznym do $f_n := f(T^n x)$ jest „moralnie" odpowiedzialne za (wewnętrzną) rozłączność Furstenberga potęg pierwszych automorfizmu. Gdy dodatkowo sumy ergodyczne $\frac{1}{N}\sum_{n\leqslant N} f(T^{pn}x)\overline{f(T^{qn}x)} \to 0$ zbiegają z kontrolowalną prędkością (to właśnie nazywamy efektywną rozłącznością), to możemy oczekiwać nie tylko rozłączności möbiusowej, ale również twierdzenia o liczbach pierwszych (pół-pierwszych) w dynamice. Ponadto zbieżność na krótkich przedziałach ma swój odpowiednik dynamiczny i stawia pytania o konsekwencje dynamiczne tego typu „rozłączności" sum ergodycznych. Ogólnie używamy metod nowoczesnej teorii ergodycznej: teorii połączeń, entropii i złożoności, teorii spektralnej wraz z narzędziami analizy wypukłej, teorii reprezentacji, teorii procesów stacjonarnych i dynamiki topologicznej.