Projekt badawczy

TEORIOMIAROWE PODEJŚCIE DO NIELINIOWYCH RÓWNAŃ CZĄSTKOWYCH I PROBLEMÓW WARIACYJNYCH

Popularno-naukowe streszczenie projektu

Anna Zatorska-Goldstein

Niniejszy projekt badawczy koncentruje się wokół dwóch grup problemów dotyczących równań różniczkowych cząstkowych mających swe źródła w modelach wykorzystywanych w fizyce.

Pierwsza grupa problemów dotyczy zagadnienia znalezienia optymalnego kształtu materiału przewodzącego ciepło. Główną trudnością jest fakt, że kształt takiego obiektu może mieć skomplikowaną geometrię. Dlatego zachodzi potrzeba rozwinięcia nowych matematycznych metod, nie tylko, aby badać rozwiązania otrzymane przy użyciu danego matematycznego modelu, ale przede wszystkim, by ten matematyczny model sformułować poprawnie.

Druga grupa zagadnień dotyczy pewnej klasy modeli matematycznych opisujących zachowanie materiałów o niejednorodnej i anizotropowej strukturze, pod wpływem różnego typu oddziaływań fizycznych. Główną trudnością jest fakt, że niejednorodność i anizotropia materiału przekłada się na niejednorodne warunki eliptyczności dla operatora różniczkowego występującego w równaniu bądź też w układzie równań różniczkowych tworzących model matematyczny. W rezultacie, aby badać, czy modele te są poprawnie sformułowane (czy w ich ramach da się w ogóle wykazać istnienie rozwiązań) wprowadza się przestrzenie funkcyjne bardzo ogólnego typu. Podstawowym problemem jest więc to, aby sprowadzić wyniki takiej analizy z powrotem do rzeczywistości, to znaczy wykazać, że otrzymane rozwiązania są wystarczająco regularne, aby służyć jako matematyczny opis rzeczywistych obiektów.

Klasyczna geometria różniczkowa bada rozmaitości gładkie, a więc takie, do opisu których używamy funkcji różniczkowalnych, i to najczęściej nieskończenie wiele razy. Niestety, do opisu i badania rzeczywistości takie funkcje nie wystarczają. Aby zbadać możliwe kształty błony mydlanej rozpiętej na pogiętej pętli z drutu, aby przewidzieć, gdzie pojawią się pęknięcia w ściskanym materiale, czy aby wyznaczyć optymalny kształt przewodnika mieszczącego się w wyznaczonym obszarze przestrzeni, potrzebujemy funkcji, które często wcale nie są różniczkowalne – bywa, że nie mają pochodnej w żadnym punkcie. Aby móc takie funkcje i przekształcenia mimo to badać metodami analizy matematycznej, wprowadzono pojęcie słabej pochodnej. Z punktu widzenia równań różniczkowych i rachunku wariacyjnego słaba pochodna jest wygodnym narzędziem, które zachowuje wiele własności zwykłej pochodnej. Jednak na końcu każdej analizy matematycznej chcielibyśmy móc precyzyjnie określić własności otrzymanych rozwiązań. Dlatego ważne jest badanie analitycznych własności funkcji i odwzorowań działających na obiektach o potencjalnie skomplikowanej geometrii.

Rozważane w tym projekcie problemy są intensywnie badane, bliskie zastosowaniom praktycznym i wykorzystują szeroką paletę narzędzi analizy geometrycznej, teorii miary, topologii, rachunku wariacyjnego i analizy funkcjonalnej.